Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 28.06.2011

11. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 31: Zeigen Sie, dass das Arnoldi- und das Lanczos-Verfahren invariant unter Shifts sind, d.h., wenn man A durch $A + \lambda I$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt, bleiben die Krylov-Basen V_k und beim Lanczos-Verfahren W_k unverändert. Wie ändern sich die Hessenbergmatrizen H_k bzw. T_k?

Aufgabe 32: Zeigen Sie: Die Residuen des QMR-Verfahrens stagnieren, d.h. es gilt $x_k^{\mathrm{QMR}} = x_{k-1}^{\mathrm{QMR}}$ genau dann, wenn die k-te BiCG-Iterierte nicht existiert.

Aufgabe 33: Betrachten Sie für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq m$ das Problem

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

mit zulässigem Bereich $D = \{y \in \mathbb{R}^n; Ay = b, y \geq 0\}$. Zeigen Sie: Falls $\operatorname{rang}(A) = m$, dann existiert stets eine Ecke $x \in D$.
Hinweis: $x \in D$ ist genau dann eine Ecke, wenn x nicht als Konvexkombination von zwei Punkten y, $z \in D$ darstellbar ist, d.h. wenn

$$x = (1-\lambda)y + \lambda z \text{ mit } \lambda \in [0,1],\ y,\ z \in D \quad \Rightarrow \quad x = y = z.$$

Überlegen Sie nun: Ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für $i \in \mathcal{I}$ und $x_i = 0$ für $i \notin \mathcal{I}$, wo $\mathcal{I} \subseteq \{1,\dots,n\}$ eine m-elementige Teilmenge ist, und $A_{\mathcal{I}} = (Ae_j)_{j\in\mathcal{I}}$ ist eine Ecke, falls $A_{\mathcal{I}}$ regulär ist. Betrachten Sie dann einen Vektor $x \in D$ mit minimaler Anzahl nichtverschwindender Komponenten und zeigen Sie, dass die reduzierte Matrix $A_{\mathcal{I}}$ vollen Rang hat, wobei $\mathcal{I}$ diejenigen Indizes sind, deren zugehörige x-Komponente nicht verschwindet. Benutzen Sie schließlich $\operatorname{rang}(A) = m$.

Aufgabe 34:

(a) Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $b = (6,1)^T$ und $c = (13,0,0,12)^T$. Zeigen Sie: $(0,6,1,0)^T$ ist die einzige Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

(b) Nun sei A die Einheitsmatrix und b und c seien Vektoren mit positiven Einträgen. Bestimmen Sie die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ c^T x = \min! \end{cases}$$

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 14: (QMR)

Programmieren Sie nun das BiCG- sowie das QMR-Verfahren (ohne Vorkonditionierung) basierend auf dem Lanczos-Algorithmus. Testen Sie Ihr Programm an dem Gleichungssystem

```
A = mmread('bcspwr03.mtx');
[m n] = size(A);
b = ones(m,1);
```

Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Dateien `mmread.m` und `bcspwr03.mtx`. Stellen Sie hingegen fest, dass die Verfahren angewendet auf das Problem aus Programmieraufgabe 13 versagen.

Besprechung in den Übungen am 05.07.2011
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 05.07.2011 per Email an die Adresse
`num2ub@na.uni-tuebingen.de`