Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 21.06.2011

10. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 28: Das Arnoldi-Verfahren werde auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ angewendet. Zeigen Sie:

(a) Ist $h_{k+1,k} = 0$, so ist $K_k = K_k(A,b)$ ein A-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$, d.h. $AK_k \subseteq K_k$, und es gilt $K_k = K_{k+1} = \ldots = K_n$.

(b) Ist k der Grad des Minimalpolynoms von A, so gibt es ein $j \le k$, so dass $h_{j+1,j} = 0$.

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass die Matrix $\widetilde{H}_k$ aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat.

Aufgabe 30: Zur Lösung von $Ax = b$ mit einer nichtsingulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird das GMRES- bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ die Arnoldi-Basis zum Startvektor b. Zeigen Sie:

(a) Wendet man das Arnoldi-Verfahren auf das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ mit $\hat{A} = QAQ^T$ und $\hat{b} = Qb$ an, wobei Q eine orthogonale Matrix ist, so gilt für die Vektoren $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_k\}$ der neuen Arnoldi-Basis $\hat{v}_j = Qv_j$.

(b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ die Lösung $\hat{x} = Qx$ liefern.

Programmieraufgabe 13: (FOM / GMRES)

Programmieren Sie das FOM- sowie das GMRES-Verfahren. Testen Sie Ihre Implementierungen anhand des Gleichungssystems

```
load west0479
A = west0479;
b = sum(A,2);
```

Mittels `spy(A)` können Sie sich einen Eindruck von der Struktur der Matrix A verschaffen. Stellen Sie jeweils die Norm der Residuen in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte dar. Implementieren Sie auch eine Linksvorkonditionierung für das GMRES-Verfahren, d.h. wenden Sie das Verfahren auf das zu $Ax = b$ äquivalente System

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

an. Benutzen Sie anstelle von B die unvollständige LU-Zerlegung

```
[L,U,P] = ilu(A,struct('type','ilutp','droptol',1e-6));
```

und plotten Sie wieder die Residuen.

Besprechung in den Übungen am 28.06.2011
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 28.06.2011 per Email an die Adresse `num2ub@na.uni-tuebingen.de`