

9. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 25:

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrischer und positiv definiten Matrix A soll mit und ohne Vorkonditionierung gelöst werden. Die Konditionszahl von A sei 10.000, die des vorkonditionierten Systems 100.

Wie viele Iterationsschritte brauchen die Methode des steilsten Abstiegs (ohne Vorkonditionierung) und das cg-Verfahren (mit und ohne Vorkonditionierung) im ungünstigsten Fall, um den Fehler (gemessen in der A -Norm) um den Faktor 10^5 zu reduzieren?

Aufgabe 26:

Beim vorkonditionierten cg-Verfahren gelte für die Ausgangsmatrix A und die Vorkonditionierungsmatrix B folgende Abschätzung:

$$\gamma(v, B^{-1}v) \leq (v, Av) \leq \Gamma(v, B^{-1}v), \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\gamma, \Gamma > 0$.

Zeigen Sie, daß für den Fehler nach k Schritten gilt

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{\kappa}} - 1}{\sqrt{\tilde{\kappa}} + 1} \right)^k \|x_0 - x\|_A, \quad \text{mit } \tilde{\kappa} = \frac{\Gamma}{\gamma}.$$

Aufgabe 27: (cg-Verfahren zur Minimierung nichtquadratischer Funktionen)

Beim cg-Verfahren von Fletcher-Reeves kann man die eindimensionalen Minimierungsverfahren näherungsweise lösen bis die Abbruchbedingung

$$|g_{k+1}^T d_k| \leq \sigma g_k^T d_k, \quad \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

erfüllt ist. Zeigen Sie, dass dann das Verfahren für jedes k ein Abstiegsverfahren ist, d.h., dass die Suchrichtung $-d_k$ eine Abstiegsrichtung ist, d.h., dass für kleine $\alpha > 0$ gilt

$$f(x_k - \alpha d_k) < f(x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $d_0 = g_0$ mit vollständiger Induktion

$$\left| \frac{g_k^T d_k}{g_k^T g_k} - 1 \right| \leq \sum_{j=0}^k \sigma^j - 1.$$

Welche Werte kann $g_k^T d_k$ also annehmen? Interpretieren Sie nun $g_k^T d_k$ geometrisch.

Programmieraufgabe 12:

Programmieren Sie das vorkonditionierte cg-Verfahren für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit positiv definiten und symmetrischer Matrix A mittels einer unvollständigen Choleski-Zerlegung. Untersuchen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit für die Matrizen aus Programmieraufgabe 11.

Besprechung in den Übungen am 21.06.2011

Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 21.06.2011 per Email an die Adresse num2ub@na.uni-tuebingen.de