Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 31.05.2011

8. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 21:

Zeigen Sie: Im cg-Verfahren ist

$$\frac{(d_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(g_k, g_k)}{(Ad_k, d_k)}\,, \qquad \frac{(Ad_k, g_{k+1})}{(Ad_k, d_k)} = -\frac{(g_{k+1}, g_{k+1})}{(g_k, g_k)}\,.$$

Aufgabe 22:

Die Eigenwerte von A (symmetrisch und positiv definit) seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Zeigen Sie: Mit $\kappa' = \lambda_2/\lambda_n$ gilt für den Fehler im cg-Verfahren

$$\|x_k - x\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa'} - 1}{\sqrt{\kappa'} + 1} \right)^{k-1} \|x_0 - x\|_A \quad \text{für } k \geq 2.$$

(Falls $\lambda_1 \gg \lambda_2$, so ist dies deutlich schärfer als die ähnliche Abschätzung mit $\kappa = \lambda_1/\lambda_n$ der Vorlesung.)

Hinweis: $q_k(\lambda) = \widetilde{q}_{k-1}(\lambda) \cdot (\lambda_1 - \lambda)/\lambda_1$.

Aufgabe 23:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie für jedes (reelle) Polynom q

$$\|q(A)\|_A = \max_{\lambda \text{ Eigenwert von } A} |q(\lambda)|,$$

wobei $\|\cdot\|_A$ definiert ist wie in der Vorlesung.

Aufgabe 24:

Zeigen Sie, dass das k-te Tschebyscheff-Polynom T_k, $k \in \mathbb{N}$, für $|t| \geq 1$ die Darstellung

$$T_k(t) = \frac{1}{2} \left(\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^k + \left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^{-k} \right)$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass für $\kappa > 1$

$$\left| T_k\Big(-\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\Big) \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right|^{-k}.$$

Programmieraufgabe 11:

Programmieren Sie das cg-Verfahren für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit positiv definiter und symmetrischer Matrix A. Untersuchen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit für Matrizen generiert durch

```
function A = MatrixGenerator(N)
A = -4*diag(ones(N^2,1)) - diag(ones(N*(N-1),1),N) - diag(ones(N*(N-1),1),-N);
for i=0:N-1
   for j=1:N-1
      A(j+i*N,j+1+i*N) = -1;
      A(j+1+i*N,j+i*N) = -1;
   end
end
```

mit $N = 4, 20, 40$.

Besprechung in den Übungen am 07.06.2011
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 07.06.2011 per Email an die Adresse
`num2ub@na.uni-tuebingen.de`