Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 24.05.2011

7. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 18: Wie kann die Methode des steilsten Abstiegs zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A benutzt werden?
Zeigen Sie: In der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T Av}$ gilt für den Fehler der Iterierten

$$\|x_{k+1} - x\|_A \le \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}}\, \|x_k - x\|_A.$$

($\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.) Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls A schlecht konditioniert ist).

Hinweis: Verwenden Sie (zum Beispiel) das folgende Grundgerüst

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|_A^2 &= \ldots = d_k^T A^{-1} d_k = \ldots = d_k^T A^{-1} d_{k-1} = \ldots \\ &= d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1} \left(1 - \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \frac{d_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T A^{-1} d_{k-1}} \right) \le \ldots = \|x_{k-1} - x\|_A^2 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)} \right). \end{aligned}$$

Machen Sie sich klar, dass zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen zueinander orthogonal sind.

Aufgabe 19: Seien $V \le W \le \mathbb{R}^n$ und $V^\perp = \{w \in W : w^T Av = 0 \text{ für alle } v \in V\}$ der zu V konjugierte Unterraum von W ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit). Dann existieren zu $w \in W$ eindeutig bestimmte $v \in V$ und $d \in V^\perp$ mit

$$w = v + d,$$

wobei $v = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(Ad_j, w)}{(Ad_j, d_j)} d_j$, falls $d_0, \ldots, d_{k-1}$ eine A-orthogonale Basis von V ist (d.h. $(Ad_i, d_j) = 0$ für $i \neq j$).

Aufgabe 20: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang r. Eine Matrix B heißt eine *Bestapproximation vom Rang k* bezüglich der Frobeniusnorm für A, falls $\|B - A\|_F$ minimal ist unter allen $m \times n$-Matrizen vom Rang k, wobei $k \le r$. Sei weiter $A = U \Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung von X mit Spalten u_i bzw. v_i von U bzw. V. Betrachten Sie Aufgabe 16 und zeigen Sie, inwiefern

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

eine solche Bestapproximation für A darstellt, für alle $k \le r$.
Man kann A_k zur Datenkompression verwenden. Für welche k stellt A_k gegenüber A tatsächlich eine Kompression dar?
Anleitung: Gehen Sie schrittweise vor:

- Zeigen Sie, dass man für eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten $\rho_1, \ldots, \rho_k$ für die (symmetrische) Blowup–Matrix

  $$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^T & 0 \end{pmatrix}$$

  die Eigenwerte $\pm\rho_1, \ldots, \pm\rho_k$ und 0 findet.

- Zeigen Sie dann, dass für $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit reellen Eigenwerten α_i und β_i, welche derart geordnet sind, dass die Summe $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$ minimal wird, die Abschätzung

$$\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_F^2 \geq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$$

gilt. Benutzen Sie hierfür unitäre Diagonalisierungen $\tilde{A} = V^* A_D V$ und $\tilde{B} = W^* B_D W$ und das Gerüst

$$\|\tilde{A} - \tilde{B}\|_F^2 = \ldots = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 |u_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$$

mit $U = VW^*$. Für die letzte Ungleichung überlegen Sie, dass der Ausdruck $\sum_{i,j=1}^n (\alpha_i - \beta_j)^2 x_{ij}$ für eine Matrix $X = (x_{ij})$ mit nichtnegativen Einträgen und Spalten- sowie Zeilensummen gleich 1 sein Minimum für $X = I$ annimmt.

- Betrachten Sie schließlich $A := \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$ und $B := \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$.

Programmieraufgabe 9: (freiwillig) Laden Sie mittels

```
load gatlin
image(X)
colormap(map)
axis off
```

das Bild X. Erstellen Sie nun im Sinne der Aufgabe 20 eine Bestapproximation vom Rang k für X, wobei Sie dasjenige k wählen, für welches die Anzahl an zu speichernden Daten gegenüber X halbiert wird. Benutzen Sie die eingebaute Funktion `svd`, um eine Singulärwertzerlegung von X zu erhalten.

Programmieraufgabe 10: Programmieren Sie die Methode des steilsten Abstiegs ...

(a) ... zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A und testen Sie Ihre Funktion anhand von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Besonders anschaulich wird die graphische Darstellung, wenn die Iterierten in ein Höhenprofil der (zu minimierenden) Funktion f eingezeichnet werden. Das geht zum Beispiel mit

```
hold on;
[x1,x2] = meshgrid(-1.2:.05:1.2,-1.2:.05:1.2);
contour(x1,x2,x1.^2 + 2*x2.^2, [0:.05:2].^2);
plot(hier sollten die Iterierten stehen, '-*', 'Linewidth', 2)
hold off;
```

(b) ... zur Minimierung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

mit Startvektor $(-1.2, 1)$.

Stellen Sie jeweils die ersten 50 Iterierten graphisch dar.

Besprechung in den Übungen am 31.05.2011
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 31.05.2011 per Email an die Adresse
`num2ub@na.uni-tuebingen.de`