Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.05.2011

6. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 15:

Zeigen Sie: Wenn $H = H_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben ist und die Matrizen H_k gemäß $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$, $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$ berechnet werden, dann gilt

$$(Q_1 \cdots Q_j)(R_j \cdots R_1) = (H - \mu_1 I) \cdots (H - \mu_j I).$$

Aufgabe 16:

Sei $U^T AV = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \dots u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \, , \\ \|A\|_2 &= \sigma_1 \, , \\ \|A\|_F^2 &= \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2, \end{aligned}$$

wobei $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ die Frobeniusnorm bezeichnet. Zeigen und verwenden Sie: $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A)$.
Folgern Sie:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A &= r \, , \\ \text{Ker } A &=< v_{r+1}, \dots, v_n > , \\ \text{Im } A &=< u_1, \dots, u_r > \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 17:

Gegeben sei eine $m \times n$ Matrix A und deren Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Σ_r nicht singulär.

Zeigen Sie, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \qquad \|x\|_2 = \min$$

gegeben ist durch

$$x = A^+ b, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 7:

Programmieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 13 und damit den QR-Algorithmus für symmetrische Tridiagonalmatrizen mit Wilkinson-Shift:

$$\mu = h_{n,n} + d - \mathrm{sign}(d)\sqrt{d^2 + h_{n-1,n}^2}$$

mit $d = (h_{n-1,n-1} - h_{n,n})/2$ und $\mathrm{sign}(0) \in \{1, -1\}$ (μ ist der Eigenwert der unteren rechten 2×2-Untermatrix von H, der näher an $h_{n,n}$ liegt).

Testen Sie Ihr Programm an $A = \mathrm{tridiag}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n = 20$. Stellen Sie die Konvergenz des ersten berechneten Eigenwertes dar, indem Sie den exakten Fehler in jedem QR-Schritt berechnen und diesen graphisch gegen die Iterationszahl auftragen.

Hinweis: Die exakten Eigenwerte von A sind $\lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{n+1} - 2$, $j = 1, \ldots, n$.

Programmieraufgabe 8:

Programmieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 17; verwenden Sie dabei den ,,numerischen Rang": $r = \max\{k : \sigma_k/\sigma_1 > \mathtt{tol}\}$.

Besprechung in den Übungen am 24.05.2011
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 24.05.2011 per Email an die Adresse
num2ub@na.uni-tuebingen.de