Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.05.2011

# 4. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

**Aufgabe 9:** (Satz von Gerschgorin)

Zeigen Sie: Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{i,k}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $Ax = \lambda x$ komponentenweise.

**Aufgabe 10:**

Sei $\lambda$ eine einfache Nullstelle des charakterisitischen Polynoms von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die Konditionszahl des Eigenwerts $\lambda$ von $A$ invariant unter unitären Ähnlichkeitstransformationen ist (d.h., dass der Eigenwert $\lambda$ der Matrix $U^*AU$ mit unitärer Matrix $U$ dieselbe Konditionszahl hat).

**Aufgabe 11:** (Kondition der Eigenvektoren)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und Links-Eigenvektoren $u_1^*, \ldots, u_n^*$. Sei weiters $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig.

Zeigen Sie: Die Matrix $A + \varepsilon C$ hat die Eigenvektoren

$$v_j(\varepsilon) = v_j + \varepsilon \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{u_i^* C v_j}{u_i^* v_i} v_i + O(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Drücken Sie $v_j'(0)$ als Linearkombination der $v_i$ aus. Benützen Sie zur Bestimmung der Koeffizienten von $v_i$ $(i \neq j)$, dass $u_i^* v_j = 0$ für $i \neq j$ (warum?). Betrachten Sie ein geeignet skaliertes $v_j(\varepsilon)$, um auch den Koeffizienten von $v_j$ wie behauptet zu bekommen.

**Aufgabe 12:**

Zeigen Sie: Ist $B$ eine normale und $A$ eine beliebige $n \times n$ Matrix, dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda$ von $A$ einen Eigenwert $\mu$ von $B$ mit

$$|\lambda - \mu| \leq ||A - B||_2$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $\lambda$ kein Eigenwert von $B$, so gilt:

$$||(\lambda I - B)^{-1}||_2 = \frac{1}{\min\limits_{\mu \in \lambda(B)} |\lambda - \mu|}.$$

Betrachten Sie dann für den zu $\lambda$ gehörenden Eigenvektor $x$ von $A$ den Vektor $(A - B)x$.

**Besprechung in den Übungen am 10.05.2011**
**Die Übungsgruppe N16, Dienstag 14-16 Uhr, wird am 10.5.2011 in S6 stattfinden.**