Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.04.2011

3. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 7: (Tschebyscheff-Interpolation)

Die Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ besitze die Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen

$$g(x) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k T_k(x)$$

mit absolut summierbaren Koeffizienten (γ_k). Sei

$$p(x) = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_0 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma}_k T_k(x)$$

das Tschebyscheff'sche Interpolationspolynom zu g vom Grade n, wobei Sie aus Numerik I wissen, dass

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(t_j) \cos(kt_j), \qquad t_j = \frac{2j+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie:

$$\tilde{\gamma}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \gamma_{k+2(n+1)l}.$$

Aufgabe 8:

Für gegebenes $\alpha > 0$ sei u_α die Lösung des Minimierungsproblems (R) aus (4.8). Zeigen Sie (für $\alpha > 0$):

(a) $\alpha \mapsto \|a * u_\alpha - b\|_{L^2}$ wächst monoton,

(b) $\alpha \mapsto \|u_\alpha^{(p)}\|_{L^2}$ fällt monoton.

Programmieraufgabe 3:

Schreiben Sie ein Programm, welches zu vorgegebenen Daten eine normalverteilte Störung addiert und diese Daten dann glättet und stellen Sie die Daten, die gestörten Daten und die geglätteten Daten graphisch dar. Als Alternative probieren und verstehen Sie das folgende Matlab-Programm:

```
N=256;
x=(2*pi/N)*[0:N-1]';                  %    Gitter
f=sin(x)+0.2*sin(3*x)-0.2*cos(6*x);   %    ungestoerte Funktion

e=0.1*randn(N,1);                     %    Stoerung normalverteilt
                                      %    mit Streuung 0.1

b=f+e;                                %    gestoerte Werte in b

bb=fft(b);                            %    inverse FFT
```

```
n=[0:N/2-1 -N/2:-1]';
alpha=0.0001;                   %   Regularisierungsparameter
uu=bb./(1+alpha*n.^4);          %   Filter
u=ifft(uu);                     %   FFT, geglaettete Daten in u
plot(x,[real(u),f,b]);          %   plotte f,u,b als Funktionen von x
delta=norm(e)/sqrt(N)
d=norm(u-b)/sqrt(N)
```

Testen Sie Ihr (oder das obige) Programm mit mehreren Werten des Regularisierungsparameters α. Modifizieren Sie das Programm so, dass es zusätzlich eine geglättete Ableitung der Funktion berechnet, und geben Sie das Ergebnis aus.

Programmieraufgabe 4:

Die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation $\mathcal{F}(X) = \hat{X}$ von $X = (x_{m,n}) \in \mathbb{C}^{M\times N}$ ist durch

$$\hat{x}_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} w_M^{mk} w_N^{nl}$$

und die Faltung $X * Y \in \mathbb{C}^{M\times N}$ durch

$$(X * Y)_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} y_{k-m,l-n}$$

$(k = 0, \ldots, M-1,\ l = 0, \ldots, N-1,)$ gegeben. Wie im eindimensionalem Fall gilt

$$X * Y = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(X) \cdot \mathcal{F}(Y)\big),$$

wobei die Multiplikation auf der rechten Seite wiederum komponentenweise zu verstehen ist und

$$\mathcal{F}^{-1}(X) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} w_M^{-mk} w_N^{-nl}$$

gilt. Realisieren Sie die zweidimensionale FFT, indem Sie die eindimensionale FFT zunächst auf die Zeilen und dann auf die Spalten von X anwenden und berechnen Sie effizient die Faltung der Matrix `double(imread('Ausgangsmatrix.jpg'))` und der Matrix, welche in der Datei `Faltungsmatrix.asc` gespeichert ist. Das Ergebnis C läßt sich mit dem Befehl `imwrite(C/255,'Ergebnismatrix.jpg');` wieder als Bilddatei speichern. Die Bilddatei und die Faltungsmatrix finden Sie auf der Webseite zu den Übungen.

Besprechung in den Übungen am 03.05.2011
Abgabe der Programmieraufgabe ebenfalls am 03.05.2011 in den Übungen (ausgedruckt) und per Email an `num2ub@na.uni-tuebingen.de`