Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.04.2011

## 2. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik II

**Aufgabe 4:** (Fourierreihen) Sei $c = (c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ eine absolut summierbare Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie:

(a)

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{c}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad , \qquad \text{wobei} \quad \hat{c}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

(b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{c}(\theta)|^2 d\theta$$

(c) Ist die Folge $d = (d_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ ebenfalls absolut summierbar, so ist es auch die Faltung $c * d$, definiert durch $(c * d)_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{n-j} d_j$. Es gilt

$$\widehat{c * d} = \hat{c} \cdot \hat{d}.$$

**Aufgabe 5:** Sei $f$ $2\pi$-periodisch und stetig mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $(c_n)$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \qquad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie:

$$\tilde{c}_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l c_{n+lN}$$

**Aufgabe 6:** Sei

$$u_N(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_N(n) e^{inx}$$

das trigonometrische Interpolationspolynom zur $2\pi$-periodischen, stetigen Funktion $u(x)$. Dann ist für $x_j = j\frac{2\pi}{N}$

$$\|u_N\|_{L^2}^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} |u(x_j)|^2.$$

Hinweis: Wenden Sie zunächst die Parseval'sche Gleichung aus §3 und dann die aus §1 an.

**Programmieraufgabe 2:** Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation (ohne Verwendung von `fft` und `ifft`). Sie dürfen annehmen, dass die Länge des Eingabevektors eine Zweierpotenz ist. Hinweis: Implementieren Sie die schnelle Fourier-Transformation rekursiv (d.h. Ihre Funktion ruft sich selbst wieder auf).

**Besprechung in den Übungen am 26.04.2011**
**Abgabe der Programmieraufgabe ebenfalls am 26.04.2011 in den Übungen (ausgedruckt) und per Email an** `num2ub@na.uni-tuebingen.de`