Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 21.01.2026

13. Übungsblatt zur Numerik

Hinweis:
Für die Klausurzulassung müssen insgesamt 50% der theoretischen Aufgaben als gelöst angekreuzt sein, also 21 Aufgaben der 13 Übungsblätter.
Die Übungsgruppe am 04.02. wird eine Wiederholungs- und Fragestunde.

Aufgabe 40: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ und $f \in C(D; \mathbb{R}^d)$. In der Vorlesung haben wir mithilfe des expliziten Euler-Verfahrens und einer hiermit konstruierten Teilfolge stetiger Funktionen eine lokale Lösung der AWA gefunden:

$$\dot{x} = f(x), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0 \in D, \tag{1}$$

und somit konstruktiv den Satz von Peano bewiesen.

(a) Sei zusätzlich f Lipschitz. Zeigen Sie, dass bereits die *gesamte Folge* aus obiger Konstruktion gegen die Lösung von (1) konvergiert.

(b) Sei zusätzlich $f \in C^1(D; \mathbb{R}^d)$. Sei $\{y^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}^d$ die endliche Folge der oben beschriebenen Euler-Iterierten (bei uniformer Schrittweite $h = T/N$). Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\exists C > 0 : \quad \max_{0 \le n \le N} \|x(t_n) - y^n\| \le Ch. \tag{2}$$

Wovon hängt die hierbei verwendete Konstante C unabhängig von h ab?

Aufgabe 41: Für viele AWA (1) erweist sich das implizite Euler-Verfahren mit Iterierten $\{y^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}^d$

$$y^n = y^{n-1} + hf(y^n), \quad 1 \le n \le \frac{T}{h}, \quad y^0 = x_0 \tag{3}$$

als sinnvoll anstelle des expliziten Euler-Verfahrens. Hier muss allerdings die (eindeutige) Lösbarkeit von (3) für jedes $n \ge 1$ zunächst analytisch geklärt werden.

(a) Diskutieren Sie die Lösbarkeit von (3) pro Zeitschritt für $f(x) = Ax$, mit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, bzw. speziell für A symmetrisch positiv definit.

(b) Sei $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit. Weisen Sie für die Iterierten $\{y^n\}_{n=0}^N$ aus (3) eine Abschätzung der Form (2) nach.

Aufgabe 42: Betrachten Sie die Menge $(0, T) \times O \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $O = (0, 1)$. Nachfolgend betrachten wir eine sog. partielle Differentialgleichung (PDE) — die Wärmeleitungsgleichung — die die '(Raum-)Temperatur' $u \equiv u(t, x)$ für alle $(t, x) \in (0, T) \times O$ bestimmt durch folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = g(t,x), \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times O, \quad \text{(PDE)} \tag{4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \overline{O}, \quad \text{(Anfangsbedingung)} \tag{5}$$

$$u(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \partial O, \quad \text{(Randbedingung)} \tag{6}$$

bei vorgegebenen Funktionen

$$u_0 \in C(\overline{O}) \quad \text{und} \quad g \in C([0,T] \times \overline{O}).$$

Gegenstand der Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ ist eine Lösungstheorie — auf die wir hier nicht eingehen. In dieser Aufgabe wollen wir mithilfe der *Linienmethode* eine „zugehörige“ AWA vom Typ (1) formulieren, mit deren Hilfe eine numerische Annäherung der Lösung von (4)–(6) gelingt. Zu diesem Zweck gehen wir wie folgt vor:

1) **Partitionierung von O:** Wähle eine (uniforme) Partition $\{x_i\}_{i=0}^d$ von O der Feinheit $\Delta x > 0$, mit den Eigenschaften:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x, \quad 0 \le i \le d-1, \quad \bigcup_{i=0}^{d-1} [x_i, x_{i+1}] = \overline{O}, \quad x_0 = 0, \quad x_d = 1. \tag{7}$$

2) **Approximation von $-\Delta$ durch einen Differenzenquotienten:** Für alle $1 \le i \le d-1$ approximieren wir

$$\Delta u(t, x_i) \approx \frac{u(t, x_{i-1}) - 2u(t, x_i) + u(t, x_{i+1})}{(\Delta x)^2}, \quad \forall t \in (0,T). \tag{8}$$

(a) Wie lautet das zugehörige ODE-System (samt Anfangsbedingung) für

$$x(t) \approx (u(t, x_1), \ldots, u(t, x_{d-1})), \quad \forall t \in (0,T),$$

wenn (8) und $b(t) := (g(t, x_1), \cdots, g(t, x_{d-1}))^\top$ verwendet werden?

(b) Wie lautet das implizite Euler-Verfahren für die ODE aus (a)? Ist das resultierende algebraische Problem pro Zeitschritt mit dem LR-Verfahren aus der Numerik lösbar?

Besprechung der Übungsaufgaben am 28.01.2026