Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 14.01.2026

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37: Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben sei das lineare DGL-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) = Ay(t), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$, so ist

$$y(t) = e^{\lambda t} v$$

eine Lösung des DGL-Systems (1).

(b) Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Zeigen Sie, dass jedes y der Form

$$y(t) = e^{tA} b,$$

bei beliebigem $b \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung des DGL-Systems (1) ist. Welchen Wert nimmt $y(0)$ an?

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t), \quad t > 0, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{1 + |y(t)|}, \quad t > 0, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) Untersuchen Sie (2) auf (globale) Existenz und Eindeutigkeit.

(b) Sei y die Lösung von (2) und sei z eine Lösung derselben Gleichung, allerdings mit Anfangswert $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$. Leiten Sie eine Abschätzung von $|y(t) - z(t)|$ für $t > 0$ her.

Aufgabe 39: Untersuchen Sie mithilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (eindeutig, global, beschränkt) der folgenden skalaren Anfangswertaufgaben:

(1) $y'(t) = y(t)^2$,

(2) $y'(t) = -y(t)^2$,

(3) $y'(t) = \sqrt{y(t)}$,

(4) $y'(t) = \cos(y(t)) - 2y(t)$,

jeweils für $t \geq 0$ und $y(0) = 1$.

Besprechung der Übungsaufgaben am 21.01.2026