Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 07.01.2026

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 34: Untersuchen Sie, ob sich für die nachfolgend gegebenen Funktionen f und Startwerte $x^{(0)}$ die theoretisch zu erwartende *quadratische Konvergenz* des Newton-Verfahrens ergibt. Falls nicht, erläutern Sie die Gründe dafür.

(a) $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}, \qquad x^{(0)} \neq 0.$

(b) $f(x) = x^3 - x, \qquad x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

(c) $f(x) = x^4, \qquad x^{(0)} \neq 0.$

Aufgabe 35: Sei $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - a$ soll mithilfe des Newton-Verfahrens berechnet werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift gegeben ist durch

$$x_{k+1} = x_k + x_k\,(1 - ax_k)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $e_k := x_k - \frac{1}{a}$ gilt:

$$e_{k+1} = -ae_k^2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie außerdem mit vollständiger Induktion, dass

$$e_k = -\frac{1}{a}\,\rho^{2^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \rho := |ax_0 - 1|.$$

Welche Bedingung an ρ und x_0 ist notwendig und hinreichend für die globale Konvergenz des Iterationsverfahrens?

(c) Es sei $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ und $x_0 = \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der erforderlichen elementaren Rechenoperationen zur Berechnung einer Näherung x_k für $\frac{1}{a}$ durch das Newton-Verfahren mit einem Fehler kleiner als 10^{-8}.

Aufgabe 36: Seien $n, p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ glatte Funktionen mit der Eigenschaft, dass die zweite Ableitung (nach der ersten Komponente) der Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$L(x, \mu) := f(x) + \mu^\top g(x),$$

positiv definit auf dem Kern von $g'(x)$ ist. Sei x^* eine Lösung des Minimierungsproblems

$$f(x^*) = \min\left\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\right\}.$$

Der Punkt x^* heißt *regulär*, falls die Gradienten $\{\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_p(x^*)\}$ linear unabhängig sind.

In der nichtlinearen Optimierung wird bewiesen, dass — falls x^* regulär und ein lokales Minimum von f ist — es eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikatoren $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ gibt, sodass $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \mu^*) &= 0, \\ g(x^*) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllt. Dieses System besteht aus $n + p$ Unbekannten und $n + p$ Gleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Lösung des Systems (1) gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x_k, \mu_k) & \nabla g(x_k) \\ \nabla g(x_k)^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ \mu_{k+1} - \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L(x_k, \mu_k) \\ -g(x_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

wobei (x_k, μ_k) die aktuelle Iterierte bezeichnet für $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren aus Teil (a) durchführbar ist, d. h. zeigen Sie, dass die im Newton-Verfahren vorkommende Matrix invertierbar ist.

(c) Seien nun $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ gegeben. Bestimmen Sie die Tupel (x^*, μ^*) als Lösung des Systems (1).

Besprechung der Übungsaufgaben am 14.01.2026