Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 17.12.2025

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 30: Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^2 x^2 e^{-5x} dx$ einmal durch zweifache und einmal durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen. Was lässt sich über den Fehler sagen, wenn man die Simpsonregel vier statt zwei Mal verwendet?

Aufgabe 31: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gegeben sei eine Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ des Intervalls $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für die Gewichte $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ einer Quadraturformel der Ordnung $n+1$ mit paarweise disjunkten Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$, welche die Bedingung $x_i = 1 - x_{n-i}$ erfüllen, gilt: $\alpha_i = \alpha_{n-i}$, für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 32: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_n(f)$ eine Quadraturformel der Ordnung $n+1$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i und Gewichten $\alpha_i > 0$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass für Funktionen $f \in C([a,b])$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - I_n(f) \right| \leq 2(b-a) \inf_{p \in P_n} \|f - p\|_{C([a,b])},$$

wobei P_n den Raum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ bezeichnet.

Aufgabe 33: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Um ein Gauß-Quadraturverfahren der Ordnung $2n+2$ mit Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ (und Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$) zu konstruieren, wurde in der Vorlesung ein eindeutiges Polynom $p_{n+1} \in P_{n+1}$ der Form

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren konstruiert. Dieses Polynom p_{n+1} hat die Eigenschaft, dass $(p_{n+1}, q)_\omega = 0$ für alle $q \in P_n$. Zeigen Sie: Die Nullstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ des Polynoms p_{n+1} sind reell, einfach, und liegen im Intervall (a,b).

Das Numerik-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

Besprechung der Übungsaufgaben am 07.01.2026