Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 10.12.2025

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 26: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\omega \in C([a,b])$ mit $\omega(x) > 0$ derart, dass

$$\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(\cdot,\cdot)_\omega : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(f,g)_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert ist und ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen ist.

(b) (**Formel von Rodrigues**) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a,b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = c_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big[\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k\Big], \quad c_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0,$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Polynom p_k orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 27: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in [-1,1]$ definieren wir das Tschebyscheff-Polynom

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)).$$

Zeigen Sie:

a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, und für $n \geq 1$ gilt die folgende Rekursion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

b) T_n ist ein Polynom vom Grad n und es gilt $|T_n(x)| \leq 1$.

c) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$T_n\Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\Big) = (-1)^k.$$

d) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$T_n\Big(\cos\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big)\Big) = 0.$$

e) Sei $\omega : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Zeigen Sie, dass

$$(T_j, T_k)_\omega = \begin{cases} \pi & \text{für } j = k = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } j = k \neq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall j,k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Aufgabe 28: Sei $(\mathbb{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}})$ ein Prähilbertraum, und $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Wir wissen bereits, dass für jedes $f \in \mathbb{H}$ genau ein $g \equiv g(f) \in \mathbb{S}$ mit Bestapproximations-Eigenschaft existiert. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(f - g, \varphi)_{\mathbb{H}} = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{S}.$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass die Summe der Gewichte von interpolatorischen Quadraturformeln immer die Intervall-Länge ist.

Besprechung der Übungsaufgaben am 17.12.2025