Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 03.12.2025

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 23: Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der kubischen Spline-Interpolation die *not-a-knot*-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $h > 0$. Für eine äquidistante Zerlegung $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$, stellen Sie das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit *not-a-knot*-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 24: Der natürliche kubische Spline s erfülle die Interpolationsbedingungen

$$s(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

mit

x_k	0	1	2	3
y_k	5	15	20	20

Berechnen Sie den Wert des Splines an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 25: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Gegeben seien Punktepaare $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit äquidistanten Knoten $x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$.

(a) Die diskrete Fouriertransformation $F_n : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ sei definiert durch

$$\big(F_n(y)\big)_k := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} y_j \exp(-ijx_k)\,, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaft gilt:

$$\|F_n(y)\|_2^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, y \right\|_2^2 \qquad \forall y \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

(b) Die Faltung $* : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ zweier Vektoren $y, z \in \mathbb{C}^{n+1}$ (in beide Indexrichtungen periodisch fortgesetzt) sei definiert durch

$$(y * z)_k := \sum_{j=0}^{n} y_{k-j}\, z_j, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

Zeigen Sie: Für alle $y, z \in \mathbb{C}^{n+1}$ gilt

$$\frac{1}{n+1} F_n(y * z) = \big(F_n(y)\big) \bullet \big(F_n(z)\big),$$

wobei "$\bullet$" die punktweise Multiplikation bezeichnet: $(y \bullet z)_k := y_k z_k$.

Besprechung der Übungsaufgaben am 10.12.2025