

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 19: Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	3
y_i	8	3	4	8

- Man interpoliere die Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.
- Es seien $(x_4, y_4) = (2, 1)$. Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes (x_4, y_4) ?
- Man bestimme mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.

Aufgabe 20: Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen beim dividierten Differenzen-Verfahren mit Newton-Polynomen. Vergleichen Sie diese mit der aus Aufgabe 18. Was ist – abgesehen von weniger Rechenschritten – der Vorteil gegenüber dem Lagrange-Ansatz?

Aufgabe 21: Sei $f \in C^n([a, b])$, und seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschieden.

- Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [\min(x_0, \dots, x_n), \max(x_0, \dots, x_n)]$ gibt, sodass die n -te dividierte Differenz erfüllt:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

- Überprüfen Sie, dass für $n = 1$ dieses Ergebnis auf den klassischen Mittelwertsatz der Differentialrechnung zurückfällt:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Aufgabe 22: Für den interpolierenden, natürlichen kubischen Spline s_n gilt

$$\int_a^b |s_n''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

bezüglich aller weiteren interpolierenden Funktionen $f \in C^2([a, b])$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Besprechung der Übungsaufgaben am 03.12.2025