

## 7. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 19:** Gegeben sei die Wertetabelle

$x_i$	-1	0	1	3
$y_i$	8	3	4	8

- (a) Man interpoliere die Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.
- (b) Es seien  $(x_4, y_4) = (2, 1)$ . Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes  $(x_4, y_4)$ ?
- (c) Man bestimme mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.

**Aufgabe 20:** Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen beim dividierten Differenzen-Verfahren mit Newton-Polynomen. Vergleichen Sie diese mit der aus Aufgabe 18. Was ist – abgesehen von weniger Rechenschritten – der Vorteil gegenüber dem Lagrange-Ansatz?

**Aufgabe 21:** Sei  $f \in C^n([a, b])$ , und seien  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  paarweise verschieden.

- (a) Zeigen Sie, dass es ein  $\xi \in [\min(x_0, \dots, x_n), \max(x_0, \dots, x_n)]$  gibt, sodass die  $n$ -te dividierte Differenz erfüllt:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

- (b) Überprüfen Sie, dass für  $n = 1$  dieses Ergebnis auf den klassischen Mittelwertsatz der Differentialrechnung zurückfällt:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

**Aufgabe 22:** Für den interpolierenden, natürlichen kubischen Spline  $s_n$  gilt

$$\int_a^b |s_n''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

bezüglich aller weiteren interpolierenden Funktionen  $f \in C^2([a, b])$  mit  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .