

6. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 16: Zu paarweise verschiedenen reellen Stützstellen x_0, \dots, x_n sind die Lagrangeschen Basispolynome L_i für $0 \leq i \leq n$ definiert durch

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) \equiv 1.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^n L_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ 0 & 1 \leq j \leq n, \\ (-1)^n \prod_{i=0}^n x_i & j = n + 1. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie für den letzten Fall den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 17: Zeigen Sie, dass es maximal ein Interpolationspolynom p vom Grad n gibt mit

$$p(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

für vorgegebene Knotenpunkte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ mit paarweise verschiedenen $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Aufgabe 18: Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen (jeweils die Anzahl der Additionen bzw. Multiplikationen), die für die Berechnung eines Interpolationspolynoms in Lagrange-Darstellung nötig sind.