

## 5. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 13:** Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

**Aufgabe 14:**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine nicht-singuläre Matrix. Zeigen Sie, dass die 2-Norm-Konditionszahl von  $A$  durch das Verhältnis der größten und kleinsten Singulärwerte gegeben ist, d.h.

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)},$$

wobei  $\sigma_{\max}(A)$  und  $\sigma_{\min}(A)$  den größten bzw. kleinsten Singulärwert von  $A$  bezeichnen.

**Aufgabe 15:**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung  $A = U\Sigma V^\top$ . Geben Sie dabei die Matrizen  $U$ ,  $\Sigma$  und  $V$  explizit an.
- Verwenden Sie die Singulärwertzerlegung, um das Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$$

zu lösen. Bestimmen Sie also den Vektor  $x$ , für den der Fehler  $\|Ax - b\|$  minimal ist.

**Besprechung der Übungsaufgaben am 19.11.2025**