

5. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 13: Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 14:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine nicht-singuläre Matrix. Zeigen Sie, dass die 2-Norm-Konditionszahl von A durch das Verhältnis der größten und kleinsten Singulärwerte gegeben ist, d.h.

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)},$$

wobei $\sigma_{\max}(A)$ und $\sigma_{\min}(A)$ den größten bzw. kleinsten Singulärwert von A bezeichnen.

Aufgabe 15:

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$. Geben Sie dabei die Matrizen U , Σ und V explizit an.
- (b) Verwenden Sie die Singulärwertzerlegung, um das Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$$

zu lösen. Bestimmen Sie also den Vektor x , für den der Fehler $\|Ax - b\|$ minimal ist.