Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 29.10.2025

3. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 7:
Sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindender Diagonale, d.h.

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $r_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei weiter $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Entwickeln Sie einen Algorithmus, mit welchem Sie das lineare Gleichungssystem $Rx = b$ lösen können. Wieviele elementare Rechenschritte (abhängig von der Dimension n) benötigen Sie hierfür?

(b) Wie berechnen Sie die Determinante von R mit möglichst wenig Rechenoperationen? Wieviele Rechenoperationen sind hierfür nötig?

(c) Was ändert sich, wenn es sich um eine linke untere Dreiecksmatrix L handelt?

Hinweis: Ein elementarer Rechenschritt ist eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division.

Aufgabe 8:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien Frobenius-Matrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Inversen der Matrizen L_k wiederum Frobenius-Matrizen der Form

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

sind, und daß

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & & \\ l_{3,1} & \cdots & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,k} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und diagonaldominant. Zeigen Sie: Dann existiert eine L-R-Zerlegung von A, die mit Gaußscher Elimination ohne Zeilenvertauschung bestimmt werden kann.

Besprechung der Übungsaufgaben am 05.11.2025