

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 4:

Sei $\|\cdot\|$ eine (Vektor-)Norm auf $\mathbb{R}^n$, und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $(n \times n)$ -Matrix. Wir definieren

$$|||A||| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- (a) Zeigen Sie für die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass $|||I||| = 1$ ist.
- (b) Zeigen Sie für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||$.
- (c) Zeigen Sie, dass $|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.
- (d) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$ gilt.

Aufgabe 5:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ sowie die entsprechenden induzierten (Operator-)Matrixnormen, bezeichnet mit $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$.

- (a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
- (b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)
- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

Aufgabe 6:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A = \frac{1}{h} \text{tridiag}(1, 4, 1)$ für $h \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\text{cond}_\infty(A) \leq 3$ unabhängig von der Dimension n der Matrix A ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $A = \frac{4}{h}(I + N)$ und betrachten Sie die Neumann'sche Reihe

$$(I + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-N)^k,$$

um $\|A^{-1}\|_\infty$ abzuschätzen.