

1. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 1: (Landau-Notation)

Für (reelle) Funktionen f und g schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \rightarrow a$, ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), falls es eine Umgebung U von a und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ für alle } x \in U$$

(oder etwas präziser, falls $\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$). Anschaulich bedeutet dies, dass die Funktion f in einer Umgebung von a nicht schneller wächst als die Funktion g .

Gegeben seien die Funktionen

$$x^3, \quad \log(x), \quad 2^x, \quad x^2, \quad x^3 + 1000x^2, \quad e^x.$$

Vergleichen Sie das Wachstum dieser Funktionen für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow 0$ mit Hilfe der oben beschriebenen $\mathcal{O}$ -Notation.

Aufgabe 2:

Gegeben seien Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ durch

$$\varphi_1(x, y) := x + y, \quad \varphi_2(x, y) := x \cdot y, \quad \varphi_3(x, y) := \frac{x}{y}.$$

Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\text{err}_{\text{rel}}(\varphi_i) = \left| \frac{\varphi_i(\tilde{x}, \tilde{y}) - \varphi_i(x, y)}{\varphi_i(x, y)} \right|, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

für die Näherungswerte

$$\tilde{x} := x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} := y(1 + \varepsilon_y).$$

Für welche Konstellationen von x und y werden die Eingabefehler ε_x und ε_y jeweils verstärkt? Welche der Grundrechenarten Addition, Multiplikation und Division sind damit gut gestellt und daher beim Rechnen mit dem Computer stabil gegenüber Rundungsfehlern?

Aufgabe 3:

Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und betrachte eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Betrachte nun den Raum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass durch

$$|||A||| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine Norm auf dem Raum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen definiert ist.