Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 22.01.2025

13. Übungsblatt zur Numerik

Hinweis:
Für die Klausurzulassung müssen insgesamt 50% der theoretischen Aufgaben als gelöst angekreuzt sein, also 26 Aufgaben der 13 Übungsblätter.
Die Übungsgruppe am 05.02. wird eine Wiederholungs- und Fragestunde.

Aufgabe 49:

In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren Ordnung 2 hat.

Aufgabe 50:

Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ verwende man für ein festes $\theta \in [0, 1]$ das θ-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n)).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an. Wie nennt man die Verfahren für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$?

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ.
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Verfahren höchstens Ordnung 2 hat.

Aufgabe 51:

Weisen Sie nach, dass das klassische Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung 4 hat.
(Mit Bäumen oder, wenn Sie viel Zeit und Geduld haben, ohne Bäume.)

Aufgabe 52:

Auf das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y\,, \quad y(0) = y_0$$

werde ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit s Stufen angewandt. Zeigen Sie:

(a) $y_1 = P(h\lambda)y_0$, wobei $P(z)$ ein Polynom vom Grad s ist.

(b) Falls $p = s$, so gilt

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!}.$$

Besprechung der Übungsaufgaben am 29.01.2025.