Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 15.01.2025

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 45:

Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M\frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T-t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.
Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Aufgabe 46:

Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

Aufgabe 47:

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t, y)$, wobei $\mu(A) \leq \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 44). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

(a) Falls $\ell + L \leq 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \qquad \text{für } t \geq t_0.$$

(b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \leq \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Aufgabe 48:

Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \ldots, s \tag{1}$$

angewandt auf die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist äquivalent zu einem Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das autonome System $z' = F(z)$ mit

$$z = \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix}.$$

Diskutieren Sie zudem die Voraussetzung (1), indem Sie die innere Stufe Y_i als Näherung von $y(t_0 + c_i h)$ interpretieren.

Programmieraufgabe 6:

Es sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(t)}{\partial t} &= -\beta \frac{I(t)S(t)}{N} \\
\frac{\partial I(t)}{\partial t} &= \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t) \\
\frac{\partial R(t)}{\partial t} &= \gamma I(t).
\end{aligned}$$

Dieses System von DGL's ist ein sogenanntes SIR-Modell - ein klassischer Ansatz zur Modellierung der Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten. Hier ist die Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt: Die Ansteckbaren $S(t)$ (=Susceptibles), die Infizierten $I(t)$ (=Infected) und die Genesenen bzw. Gestorbenen $R(t)$ (=Recovered). N steht für die Gesamtzahl an Menschen. β gibt die Anzahl an neuen Infektionen an, die eine neu infizierte Person pro Zeiteinheit verursacht. γ gibt die Rate an, in welcher eine infizierte Person in einer Zeiteinheit genesen oder sterben wird. Der bekannte R-Wert (Basisreproduktionszahl) lässt sich damit einfach durch $R = \beta/\gamma$ berechnen.
Um den weiteren Verlauf der Krankheit zu modellieren, muss man das obige System von Differentialgleichungen lösen. Lösen Sie dazu die obigen Differentialgleichungen mit dem expliziten Eulerverfahren zu den Werten $t_0 = 0$, $T_{end} = 26$,$\beta = 0.505$, $\gamma = 0.5$ und $y_0 = (83 \cdot 10^6, 3,5 \cdot 10^5, 25 \cdot 10^6)^T$ und Schrittweite $h = 0.13$. Diese Zahlen entsprechen sehr grob den Zahlen zur Coronapandemie in Deutschland im Sommer 2022. Plotten Sie nun die Lösungen $S(t), I(t)$ und $R(t)$.

Hinweis: Wenn Sie die Parameter β und γ verändern, können Sie andere Modelle zu möglichen Pandemieverläufen aufstellen. Setzen Sie z.B. $\beta = 1$, so infiziert eine bereits infizierte Person pro Woche eine weitere Person. Bleibt die Person für zwei Wochen ansteckend (also $\gamma = 0.5$), so simulieren Sie einen R-Wert von 2.

Besprechung der Übungsaufgaben am 22.01.2025.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 29.01.2025, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA6_Nachname1_Nachname2_Nachname3.