Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 08.01.2025

# 11. Übungsblatt zur Numerik

## Aufgabe 41:

Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \leq n$. Zeigen sie:

(a) Falls $v^T M v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und $G$ vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls $M$ symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

## Aufgabe 42:

Geben Sie einen Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &= \min! \\ g(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

der auf ein Gleichungssystem wie in Aufgabe 41 führt. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$ Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe in einer Umgebung der Lösung vollen Rang.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine Lösung $x^*$ des obigen Minimierungsproblems mit Nebenbedinung existiert. Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren um $x^*$. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator $\lambda$ ein.

**Aufgabe 43:**

Betrachten Sie die folgende (misslungene) Matlab-Funktion,

```
function [z] = unknown_fun(z0,g,t)

k = 1000;
i = 1;
z = z0;
h = 10^-3;
d = f(z);

while (i<k) || (abs(d)>t)
    a = f(z);
    b = (1/h)*(f(z+h) - f(z-h));
    d = (1/b)*a;
    z = z + d;
    i = i + 1;
end
end
```

sowie das zugehörige (misslungene) Skript

```
xs = [-1,0,1];
sols = zeros(1,3);
e = zeros(1,3);
g=@(x)(x.^3+2);

for j=0:length(xs)
    sols(j) = unknown_fun(xs(j),g,0.01);
    e(j) = abs(g(sols(j)));
end
disp(e)
```

(a) Welcher aus der Vorlesung bekannte Algorithmus wird hier implementiert? Erklären Sie die Bedeutung der Eingabe- und Ausgabewerte der Funktion. Was wurde in der Variable $e$ im obigen Skript berechnet?

(b) Welche Fehler wurden bei der Umsetzung begangen? Unterscheiden Sie zwischen Logik- und Syntaxfehlern. Korrigieren Sie die Fehler im Code, so dass das Skript und die Funktion lauffähig sind und korrekte Ergebnisse liefern. In Funktion und Skript befinden sich insgesamt 5 Fehler.

(c) Verändern Sie die Funktion nun so, dass Sie die vereinfachte Version des Algorithmus erhalten.

**Aufgabe 44:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f(y) - f(z), y - z \rangle &\leq \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad \text{mit } \ell = \sup_{u \in D} \mu\left(f'(u)\right) \\ \|f(y) - f(z)\| &\leq L \cdot \|y - z\| \qquad \text{mit } L = \sup_{u \in D} \|f'(u)\|, \end{aligned}$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen $A$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T), \\ \|A\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}. \end{aligned}$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v \rangle$.

**Besprechung der Übungsaufgaben am 15.01.2025.**