

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37:

Sei p ein Polynom vom Grad n , dessen Nullstellen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$ reell seien.

- (a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen ξ_1 konvergiert, falls der Startwert $x_0 > \xi_1$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ für $x > \xi_1$ das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.
- (b) Falls x_0 viel größer als ξ_1 ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ($x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$).

Aufgabe 38:

- (a) Berechnen Sie iterativ $x = 1/a$ für ein gegebenes $a \neq 0$ ohne Division. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren?
- (b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$ für $a > 0$ an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.

Aufgabe 39:

Zeigen Sie, dass es in $K = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ eine Lösung (x^*, y^*) des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}y^2 - 3x &= -3 \\ \frac{3}{4} \sin(x) &= y\end{aligned}$$

gibt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 40:

Zeigen Sie für das gewöhnliche Newton-Verfahren unter den Voraussetzungen des Newton-Mysovskii-Theorems die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}\|x_k - x^*\| &\leq \alpha \frac{\gamma^{2^k - 1}}{1 - \gamma^{2^k}}, \\ \|x_k - x^*\| &\leq \frac{\omega}{2(1 - \gamma^{2^k})} \|x_k - x_{k-1}\|^2.\end{aligned}$$

Programmieraufgabe 5: (Newton-Verfahren)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `newton`, die für eine feste Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und für gegebenen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Newton-Iterationen bis zu $\|\Delta x_k\| \leq \text{TOL}$ durchführt. Diese Funktion soll die Jakobimatrix $f'(x)$ numerisch berechnen (mit zentralen Differenzen) und folgende Struktur besitzen:

```
function x = newton(f,x0,TOL)
    :
end
```

Benutzen Sie zum Lösen des linearen Gleichungssystems die LR-Zerlegung. Diese können Sie entweder selbst implementieren oder Sie verwenden die Matlab-Funktion für die LR-Zerlegung `lu`.

Testen Sie die Funktion am System

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 11 \\x_1x_2x_3 &= 6\end{aligned}$$

mit Startwert $(4, -2, 0)^T$ und $\text{TOL} = 10^{-6}$ in einem Programm `mainNewton`. Bemerkung: Damit berechnen Sie zugleich alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (Vieta).



Das Numerik-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

Besprechung der Übungsaufgaben am 08.01.2025.

Abgabe der Programmieraufgabe bis 08.01.2025, 23:59 Uhr an progtutor@na.uni-tuebingen.de

Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA5_Nachname1_Nachname2_Nachname3.