

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 33:

Zeigen Sie:

$$\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Mithilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Aufgabe 34:

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch $\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$.

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition cond_2 gilt:

$$(a) \quad \text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1, \dots, n} |r_{ii}|}{\min_{k=1, \dots, n} |r_{kk}|}.$$

$$(b) \quad \text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2.$$

Aufgabe 35:

Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 36: (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

- Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.
- Schätzen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(L)$ mit Hilfe von Aufgabe 30 ab.