

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 29:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

Aufgabe 30:

Es sei die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq l_{ii}^2$.

(b) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}$.

(c) Für die Konditionszahl $\text{cond}_2(L) = \|L\|_2 \|L^{-1}\|_2$ gilt $\text{cond}_2(L) \geq \max_{1 \leq i, k \leq n} \left| \frac{l_{ii}}{l_{kk}} \right|$.

Aufgabe 31:

Seien y, z zwei Vektoren von Gleitpunktzahlen. Das Standardskalarprodukt lässt sich rekursiv durch $\langle y, z \rangle = z_n y_n + \langle y^{n-1}, z^{n-1} \rangle$ berechnen, wobei $y^{n-1} := (y_1, \dots, y_{n-1})^T$, z^{n-1} analog. Zeigen Sie: Das in Gleitpunktrechnung erhaltene Ergebnis $\langle y, z \rangle_{fl}$ des Skalarproduktes ist gleich $\langle \hat{y}, z \rangle$ für ein \hat{y} mit

$$|y - \hat{y}| \leq n|y| \text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2).$$

Aufgabe 32:

Seien L, R untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen, b, c Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse \hat{x}, \hat{y} für die Gleichungssysteme $Ly = b$, $Rx = c$ sind die exakten Lösungen von $\hat{L}\hat{y} = b$ mit $|L - \hat{L}| \leq n|L| \text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2)$ bzw. $\hat{R}\hat{x} = c$ mit $|R - \hat{R}| \leq n|R| \text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2)$.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 31.