Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 27.11.2024

# 7. Übungsblatt zur Numerik

## Aufgabe 25:

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 6 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 26:

(a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n \times n)$-Matrix $A$ mit $|l_{ij}| \le 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \le 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen $a_i^T$ und $r_i^T$ von $A$ und $R$ und Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

## Aufgabe 27:

Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > p$, so ist $l_{ij} = 0$ für $i - j > p$ und $r_{ij} = 0$ für $j - i > p$.

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?

**Aufgabe 28:**

Gegeben sei eine $(n \times n)$–Matrix $A$ mit $\|A\| \leq r < 1$.
Zeigen Sie: $I - A$ ist invertierbar und es gelten

(a) $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumannsche Reihe),

(b) $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-r}$.

**Programmieraufgabe 4:**

(a) Schreiben Sie eine Funktion `L = cholesky(A)`, die die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A$ berechnet.

(b) Schreiben Sie Funktionen `y = vorSub(L,b)` und `x = rueckSub(L,y)`, die die Gleichungssysteme $Ly = b$ und $L^T x = c$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen lösen.

(c) Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & -8 & 5 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 45 \\ 81 \end{pmatrix}$$

mit obigen Funktionen lösen.

**Besprechung der Übungsaufgaben am 04.12.2024**
**Abgabe der Programmieraufgabe bis 11.12.2024, 23:59 Uhr an** `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
**Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA4_Nachname1_Nachname2_Nachname3.**