

6. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 21: (Periodische kubische Spline-Interpolation)

Soll eine periodische Funktion durch einen Spline s dargestellt werden, so verlangt man an Stelle der Endbedingungen für einen natürlichen oder eingespannten Spline, dass die periodische Fortsetzung zweimal stetig differenzierbar ist. Stellen Sie für den Fall äquidistanter Stützstellen das lineare Gleichungssystem für die unbekanntenen Steigungen in den Stützstellen auf und zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des interpolierenden periodischen Splines.

Hinweis: Sie erhalten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & & & * \\ * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & * & * & * \\ * & & & & * & * \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22: Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) das Gleichungssystem für den kubischen Spline s mit

$$\begin{aligned} s(x_j) &= 0 & \text{für } j = 0, \dots, n \\ s'(x_0) &= 1 & s'(x_n) = 0 \end{aligned}$$

auf. Zeigen Sie, dass die Steigungen $v_j = s'(x_j)$ mit wachsendem j rasch abfallen.

Interpretation: Störungen in den Ableitungen am Rand wirken sich im interpolierenden Spline auf Intervallen weg von x_0 kaum aus.

Aufgabe 23:

(a) Berechnen Sie mit dem Newton-Schema das Interpolationspolynom $p(x)$ zu folgenden Daten:

$$\begin{array}{c|cccccc} x_j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_j & -1 & -1 & -7 & -7 & 35 \end{array}$$

Berechnen Sie mit diesem Newton-Schema auch alle Ableitungen von p an der Stelle $x = -1$.

(b) Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Newtontableaus in der Form $p(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ dar.

Aufgabe 24: Jedes Element T_{ik} im h^2 -Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Hierbei ergeben sich die T_{i1} aus der i -fachen Anwendung der Trapezregel auf das Integral $\int_{x_0}^{x_0+H} f(x) dx$, mit Schrittweite $h_i = \frac{H}{i}$.

(a) Zeigen Sie, dass $T_{2,2}$ bei Verwendung der Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$ der Simpsonregel entspricht.

(b) Welcher Quadraturformel entspricht $T_{3,3}$?