Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.11.2024

# 5. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 17:** Betrachten Sie das folgende (misslungene) Matlab-Programm:

```
function [A,B] = ominous_func(R,p)
n = length(R)-1;
vec1 = zeros(n+3,1);
vec2 = zeros(n+3,1);
for k=n:-1:0
    vec1(k) = R(k) +2p*vec1(k+1) - vec1(k+2);
    vec2(k) = vec1(k) +2p*vec2(k+1) - vec2(k+2);
end
A = 0.5*(vec1(0)-vec1(2));
B = vec2(1)-vec2(3);
end
```

(a) Welcher aus der Vorlesung bekannte Algorithmus wird hier implementiert? Erklären Sie die Bedeutung der Eingabe- und Ausgabewerte.

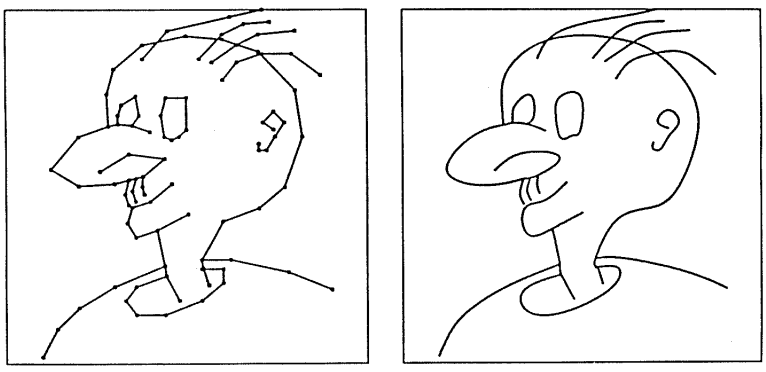
(b) Welche Fehler wurden bei der Umsetzung begangen? Unterscheiden Sie zwischen Logik- und Syntaxfehlern. Korrigieren Sie die Fehler im Code, so dass das Programm lauffähig ist und korrekte Ergebnisse liefert.

**Aufgabe 18:** Der eingespannte kubische Spline $s$ erfülle die Interpolationsbedingungen

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_j$ | -4 | 9 | 35 | 70 |

sowie $s'(0) = 10$ und $s'(3) = 40$. Berechnen Sie $s(x)$ an der Stelle $x = 1.5$.

**Aufgabe 19:** Gegeben sei eine Menge von Punkten $(p_j, q_j)_{1\le j\le n} \in \mathbb{R}^2$, die beispielsweise aus einer Vektorgrafik oder einem gescannten Bild stammen. Erfinden Sie einen Algorithmus, der die durch lineare Interpolation dieser Punkte entstehenden Kanten glättet.



**Aufgabe 20:** Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die "'not-a-knot"'-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine aquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit "'not-a-knot"'-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

**Programmieraufgabe 3:** Implementieren Sie die Interpolation mit eingespannten kubischen Splines zu gegebenen Wertepaaren $(x_i, y_i)$, $0 \le i \le n$, und gegebenen Ableitungen $s'(x_0) = v_0$, $s'(x_n) = v_n$ für den Fall äquidistanter Stützstellen. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Lösen Sie das in der Vorlesung hergeleitete lineare Gleichungssystem $Av = c$ zur Bestimmung der fehlenden Ableitungen $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})^{\mathrm{T}}$ **ohne** Hilfe des Matlab-Befehls `v = A\c`. Verwenden Sie stattdessen die Rekursion aus der Vorlesung, die sich aus Gauss-Elimination der Tridiagonalmatrix ergibt. Schreiben Sie dazu Funktionen der Gestalt

```
function v = loesen(c)          function c = rechteSeite(xv,yv,v0,vn)
     ⋮                                  ⋮
end                                  end
```

Dabei stehen `xv` und `yv` für die gegebenen Stützstellen und die zugehörigen Werte.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `SplineAuswerten(x,xv,yv,vv)`, welche den Spline an der Stelle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ gemäß der in der Vorlesung hergeleiteten Darstellung von $s_i(x)$ auswertet. Berechnen Sie dazu den zu $x$ gehörigen Index $i$ in einer einzigen Programmzeile (z.B. mit dem Befehl `floor`).

Testen Sie Ihre Programme in einem Skript `mainSI.m` anhand des Beispiels aus Aufgabe 18.

**Freiwilliger Teil der Aufgabe:**
Wenden Sie Ihr Programm außerdem auf die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ an. Erstellen Sie dafür einen Konvergenzplot für verschiedene Schrittweiten $h$ und plotten Sie diesen im einem loglog Plot gegen den maximalen Fehler auf dem Intervall. Verwenden Sie $h = \frac{\pi}{2^j}, j = 1, ..., 7$. Plotten Sie weiterhin die Referenzlinien $(h_j, h_j^k)_{j=1,\ldots,7}$ für verschiedene $k$ in dasselbe Schaubild. Welche Referenzlinie stimmt am besten mit dem beobachteten Fehler überein? Ist dies im Einklang mit der in der Vorlesung besprochenen Theorie?

**Besprechung der Übungsaufgaben am 20.11.2024**
**Abgabe der Programmieraufgabe bis 27.11.2024, 23:59 Uhr an** `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
**Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA3_Nachname1_Nachname2_Nachname3.**