Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 06.11.2024

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 13:

Es sei eine Funktion f gegeben. Ergänzen Sie die untenstehende Matlab-Funktion, sodass diese in einem Vektor dy die Koeffizienten des Newtoninterpolationspolynoms zurückgibt (also die dividierten Differenzen $\delta^k y[x_0, \dots, x_k]$). Benutzen Sie dafür nicht Matlab selbst, sondern schreiben Sie dies von Hand. Sie dürfen dabei annehmen, dass der Input x ein Vektor mit paarweise verschiedenen Stützstellen, sowie y ein Vektor der Funktionswerte ist, also $f(x_i) = y_i$ gilt.

```
function [dy] = newton_koeff(x,y)
end
```

Hinweis: Schreiben Sie Matlab-Code, Pseudocode ist nicht erlaubt.

Aufgabe 14: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 1), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Aufgabe 15: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = 1 + T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x) + T_5(x) + T_6(x) + T_7(x) + T_8(x) + T_9(x).$$

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)

$$\sum_{k=0}^{9} p(x_k)^2 \quad \text{mit } x_k = \cos\Big(\frac{2k+1}{10} \cdot \frac{\pi}{2}\Big)$$

sowie

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x p(x)\, dx \qquad .$$

Hinweis: Orthogonalität der T_k

Aufgabe 16:

(a) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Daten

x_j	-1	1
y_j	1	7
y'_j	-1	3

sowie $p(0)$.

(b) Sei $f \in C^4[x_0, x_1]$, $h = x_1 - x_0$ und p sei das kubische Hermite-Interpolationspolynom mit $p(x_i) = f(x_i)$ und $p'(x_i) = f'(x_i)$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f^{(4)}(\xi)|, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Besprechung der Übungsaufgaben am 13.11.2024