Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.10.2024

1. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 1: (Landau-Notation)
Für (reelle) Funktionen f und g schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \to a$, ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), falls es eine Umgebung U von a und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ für alle } x \in U$$

(oder etwas präziser, falls $\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$). Anschaulich bedeutet dies, dass die Funktion f in einer Umgebung von a nicht schneller wächst als die Funktion g.

Gegeben seien die Funktionen

$$x^3, \quad \log(x), \quad 2^x, \quad x^2, \quad x^3 + 1000x^2, \quad e^x.$$

Vergleichen Sie das Wachstum dieser Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to 0$ mit Hilfe der oben beschriebenen $\mathcal{O}$-Notation.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-5x} dx$ einmal durch zweifache und einmal durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen. Was lässt sich über den Fehler sagen, wenn man die Simpsonregel vier statt zwei Mal verwendet?

Aufgabe 3:
Es seien die Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ einer Quadraturformel für $s = 3$ vorgegeben. Bestimmen Sie den Knoten c_2 sowie die Gewichte b_1, b_2 und b_3 so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird. Wie groß ist die Ordnung Ihrer Quadraturformel?

Aufgabe 4:
Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen für die Mittelpunktregel:

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_0 + h/2) \right| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|.$$

Programmieraufgabe 1:

(a) Schreiben Sie eine Funktion `Ih = quadratur(f,a,b,N,regel)`, die die folgenden Argumente (in obiger Reihenfolge) erwartet: Eine Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}\,,$$

reelle Zahlen `a`, `b` eine ganze Zahl `N` und einen String `regel`, welche den Wert `'rechteck'`, `'trapez'` oder `'simpson'` annehmen kann. Je nachdem, welchen Wert `regel` hat, soll das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mit der *Rechtecksregel*, der *Trapezregel* und der *Simpsonregel* approximiert werden. `N` gibt die Anzahl der (äquidistanten) Teilintervalle an.

(b) Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\mathrm{d}x\,.$$

Schreiben Sie ein Skript `quad_plot`, welche folgende Aufgabe erfüllt: Berechnen Sie die Approximation des Integrals für alle in (a) genannten Verfahren und mit $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$.

Sei h die Länge der jeweiligen Teilintervalle. Generieren Sie mit dem Matlab-Befehl `loglog` für jede Quadraturformel ein Schaubild, welches den Logarithmus des Fehlers als Funktion von $\log(h)$ aufträgt. Zeichnen Sie in den je selben Plot die Funktion h bei der Rechtecksregel, h^2 bei der Trapezregel und h^4 bei der Simpsonregel.

Was beobachten Sie? Können Sie das Verhalten erklären?

Hinweise: Der Befehl `loglog` funktioniert wie der Befehl `plot`, jedoch wird $\log(f(\log(x)))$ über $\log(x)$ aufgetragen. Mit `figure(k)` können Sie Matlab anweisen, den folgenden Plot in das k-te Schaubild zu zeichnen.

Besprechung der Übungsaufgaben am 23.10.2024
Abgabe der Programmieraufgabe bis 30.10.2024, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`