EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Dr. Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2023/24 **Tübingen, 20.11.2023**

Übungsblatt 6

Problem 1. Zu paarweise verschiedenen reellen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ sind die Lagrangeschen Basispolynome L_i für $0 \leq i \leq n$ definiert durch

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,.$$

a) Zeigen Sie, daß

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) \equiv 1 \,.$$

b) Zeigen Sie, daß

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1 & j = 0 \,, \\ 0 & 1 \leq j \leq n \,, \\ (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i & j = n+1 \,. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie für den letzten Fall den Fundamentalsatz der Algebra.

Problem 2. Zeigen Sie, daß es maximal ein Interpolationsplynom p vom Grad n gibt mit $p(x_i) = y_i$ $(0 \leq i \leq n)$ für vorgegebene Knotenpunkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ mit paarweise verschiedenen $\{x_i\}_{i=0}^{n}$.

Problem 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen (jeweils die Anzahl der Additionen bzw. Multiplikationen), die für die Berechnung eines Interpolationspolynoms in Lagrange-Darstellung nötig sind.

Programmieraufgabe 2: (QR-Zerlegung).

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer(A)`, welche zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $Rang(A) = n$ zwei Matrizen Q, R zurückgibt, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ der für die Zerlegung entscheidende Teil der orthogonalen Matrix $\tilde{Q}$ ist und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist und $A = QR$ gilt. Verwenden Sie dabei den in der Vorlesung vorgestellten Householder-Algorithmus. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function [Q,R] = QRzer(A)
```

```
    ...
end
```

b) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer_loesen(Q,R,b)`, welche Q und R wie in a) beschrieben und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ entgegen nimmt, und die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $QRx = b$ berechnet und zurückgibt. Bestimmen Sie den Vektor x mittels Rückwärtssubstitution. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function [x] = QRzer_loesen(Q,R,b)
    ...
end
```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_QRzer.m`, welches unter Verwendung der Funktionen `QRzer` und `QRzer_loesen` geeignete Koeffizienten γ_j $j = 1, ..., 5$ ermittelt, so dass die Funktion $f(x) = \sum_{j=1}^{5} \gamma_j \phi_j(x)$ mit

$$\phi_1(x) = x^2, \quad \phi_2(x) = x^4, \quad \phi_3(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \phi_4(x) = \exp(-(x-1)), \quad \phi_5(x) = \sin(2\pi x)$$

eine Ausgleichskurve der Messdaten

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x_i)$	100	14	61	68	60	35	22	80	90	105

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate ist. Hierbei dürfen Sie nicht die Gaußsche Normalengleichung verwenden.

Stellen Sie die ermittelte Ausgleichskurve zusammen mit den Messdaten in einem geeigneten Schaubild dar.

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 28.11.2023 statt. Abgabe von Programmieraufgabe 2 bis spätestens 05.12.2023. Die genauen Details der Abgabe finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an " *progtutor@na.uni-tuebingen.de* ".