EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Dr. Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2023/24 **Tübingen, 11.12.2023**

Übungsblatt 9

Problem 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Gegeben seien Punktepaare $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit äquidistanten Knoten $x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$.

a) Zeigen Sie, daß die diskrete Fouriertransformation $F_n : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, die durch ($i = \sqrt{-1}$)

$$\big(F_n(\mathbf{y})\big)_k := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} y_j \exp\big(-ijx_k\big)$$

definiert ist, folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\|F_n(\mathbf{y})\|_2 = \Big\|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\mathbf{y}\Big\|_2 \qquad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}\,.$$

b) Die Faltung $* : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ von zwei Vektoren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ (die in beide Indexrichtungen periodisch fortgesetzt sind) sind definiert durch

$$(\mathbf{y} * \mathbf{z})_k := \sum_{j=0}^{n} y_{k-j} z_j \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, n\})\,.$$

Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ gilt

$$\frac{1}{n+1} F_n(\mathbf{y} * \mathbf{z}) = \big(F_n(\mathbf{y})\big) \bullet \big(F_n(\mathbf{z})\big)\,,$$

wobei $\bullet$ die punktweise Multiplikation ist, die durch $(\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})_k := y_k z_k$ definiert ist.

Problem 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\omega \in C([a,b])$ mit $\omega(x) > 0$ derart, daß

$$\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $(\cdot,\cdot)_\omega : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(f,g)_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert ist und ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen ist.

b) (Formel von *Rodrigues*) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a,b]$

orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = c_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[\omega(x)(x-a)^k (b-x)^k \right] \qquad (c_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0)\,,$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß das Polynom p_k orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 19.12.2023.