



## Numerik

Wintersemester 2023/24

Tübingen, 04.12.2023

### Übungsblatt 8

**Problem 1.** Für den interpolierenden, natürlichen kubischen Spline  $s_n$  gilt

$$\int_a^b |s_n''(x)|^2, dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2, dx$$

bezüglich aller weiteren interpolierenden Funktionen  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$  mit  $f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$ .

**Problem 2.** Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der (kubischen) Spline-Interpolation die 'not-a-knot'-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \quad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, daß der Spline auf den Teilintervallen  $[x_0, x_2]$  und  $[x_{n-2}, x_n]$  durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $h > 0$ . Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung  $x_k = x_0 + kh, k \in \{0, 1, \dots, n\}$  das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit 'not-a-knot'-Bedingungen auf. Zeigen Sie, daß das lineare Gleichungssystem stets eine eindeutige Lösung besitzt.

**Problem 3.** Der natürliche kubische Spline  $s$  erfülle die Interpolationsbedingungen

k	0	1	2	3
$x_k$	0	1	2	3
$y_k$	5	15	20	20

Berechnen Sie  $s(x)$  an der Stelle  $x = 1.5$ .

**Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 12.12.2023.**