



Numerik

Wintersemester 2023/24

Tübingen, 06.11.2023

Übungsblatt 4

Problem 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Wir nehmen an, dass tatsächlich sämtliche Teilmatrizen $A_{-k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ — mit $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ für $1 \leq k \leq n$ — invertierbar sind. Zeigen Sie, dass es dann genau eine $L - R$ -Zerlegung von A , gibt, mit $l_{ii} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Problem 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und diagonaldominant. Zeigen Sie: Dann existiert eine $L - R$ -Zerlegung von A , die mit Gaußscher Elimination *ohne* Zeilenvertauschung bestimmt werden kann.

Problem 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Zeigen Sie: Die Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stets symmetrisch und positiv semi-definit. Im Fall $\text{Rang}(A) = n$ ist $A^T A$ sogar positiv definit.

Programmieraufgabe 1: (LR-Zerlegung)

- a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `LRzer(A)`, welche zu einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrizen L, R der zugehörigen LR-Zerlegung zurückgibt. Sie dürfen hier und im Verlauf der Aufgabe annehmen, dass die Eingabematrix A eine eindeutige LR-Zerlegung besitzt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
1     function [L,R] = LRzer(A)
2     ...
3     end
```

- b) Schreiben Sie die Matlab-Funktion `LRzer_loesen(L,R,b)`, welche zu gegebener linken unteren und rechter oberen Dreiecksmatrizen L und R und einem noch zusätzlich gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $(L \cdot R)x = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution berechnet und zurückgibt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
1     function [x] = LRzer_loesen(L,R,b)
2     ...
3     end
```

- c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_LRzer.m`, welches mit den in a) und b) geschriebenen

Funktionen $Ax = b$ berechnet und ausgibt. Dabei gelten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 14.11.2023 statt.

Abgabe von Programmieraufgabe 1 bis spätestens 21.11.2023 per Mail an: “ progtutor@na.uni-tuebingen.de “. Die genauen Details dieser Abgabeform finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Sie dürfen die Programmieraufgaben auch im Team abgeben (max. bis zu 3 Personen; müssen nicht aus einer gemeinsamen Übungsgruppe stammen!). Bitte bearbeiten Sie die Programmieraufgaben selbstständig als Team und kopieren Sie die Lösungen nicht von Anderen. Beachten Sie, dass alle Abgaben auf Plagiate überprüft werden!

ACHTUNG: Die Abgabe der zukünftigen Programmieraufgaben (d.h. ab Programmieraufgabe 2) wird über *GitHub* stattfinden. Die genauen Details dieser Abgabeform finden Sie ebenfalls auf der Vorlesungshomepage. Wir empfehlen Ihnen die Abgabe über *GitHub* schon im Zuge der Abgabe von Programmieraufgabe 1 zu testen! Hierbei darf Programmieraufgabe 1 auch zusätzlich über *GitHub* abgegeben werden. Ihre Abgabe von Programmieraufgabe 1 über *GitHub* wird jedoch nicht gewertet; Sie bekommen lediglich kurz bescheid, ob Sie diese Abgabe erfolgreich hinbekommen haben! Für (weitere) Fragen wenden Sie sich bitte an progtutor@na.uni-tuebingen.de.