EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Dr. Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2023/24 **Tübingen, 30.10.2023**

Übungsblatt 3

Problem 1. Sei $\|\cdot\|$ eine (Vektor-)Norm auf $\mathbb{R}^n$, und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $(n \times n)$-Matrix. Wir definieren

$$|||\boldsymbol{A}||| := \sup_{\vec{0}\neq\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\boldsymbol{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\,.$$

a) Zeigen Sie für die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, daß $|||\boldsymbol{I}||| = 1$ ist.

b) Zeigen Sie für zwei Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, daß $|||\boldsymbol{AB}||| \leq |||\boldsymbol{A}|||\,|||\boldsymbol{B}|||$.

c) Zeigen Sie, daß $|||\boldsymbol{A}||| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|\boldsymbol{A}\vec{x}\|$.

d) Zeigen Sie, daß für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|\boldsymbol{A}\vec{x}\| \leq |||\boldsymbol{A}|||\,\|\vec{x}\|$ gilt.

Problem 2. Sei $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindender Diagonale, d.h.

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $r_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots n$. Sei weiter $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

a) Entwickeln Sie einen Algorithmus, mit welchem Sie das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\vec{x} = \vec{b}$ lösen können. Wieviele elementare Rechenschritte (abhängig von der Dimension n) benötigen Sie hierfür?

b) Wie berechnen Sie die Determinante von $\boldsymbol{R}$ mit möglichst wenig Rechenoperationen? Wieviele Rechenoperationen sind hierfür nötig?

c) Was ändert sich, wenn es sich um eine linke untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ handelt?

Hinweis: Ein elementarer Rechenschritt ist eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division.

Problem 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien Frobenius-Matrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Inversen der Matrizen L_k wiederum Frobenius-Matrizen der Form

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

sind, und daß

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & & & \\ l_{3,1} & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1,k} & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \ldots & l_{n,k} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 07.11.2023.