



Numerik

Wintersemester 2023/24

Tübingen, 23.10.2023

Übungsblatt 2

Problem 1. Zeigen Sie: Auf dem endlichdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^d sind alle Normen äquivalent, d.h.: zu je zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ gibt es positive Zahlen m, M , sodass

$$m\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq M\|\mathbf{x}\|_a \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Problem 2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die zu den Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ zugehörigen natürlichen Matrizennormen folgende Relationen erfüllen:

- $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,
- $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$,
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|_\infty$.

Problem 3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mathbf{A} = \frac{1}{h} \text{tridiag}(1, 4, 1)$ für $h \neq 0$. Zeigen Sie, daß $\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) \leq 3$ unabhängig von der Dimension n der Matrix \mathbf{A} ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $\mathbf{A} = \frac{4}{h}(1 + \mathbf{N})$ und betrachten sie die *Neumann'sche Reihe*

$$(1 + \mathbf{N})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathbf{N})^k,$$

um $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$ abzuschätzen.

Besprechung der Aufgaben in den Übungsgruppen am 31.10.2023.