EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Dr. Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2023/24 **Tübingen, 08.01.2024**

Übungsblatt 11

Problem 1. Untersuchen Sie, ob sich für die nachfolgenden gegebenen Funktionen f und $x^{(0)}$ die theoretisch zu erwartende quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens ergibt. Falls nicht, erläutern Sie die Gründe dafür.

a) $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ für $x^{(0)} = 0$.

b) $f(x) = x^3 - x$ für $x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

c) $f(x) = x^4$ für $x^{(0)} \neq 0$.

Problem 2. Sei $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - a$ soll mithilfe des Newton-Verfahrens berechnet werden.

a) Zeigen Sie, daß die Iterationsvorschrift gegeben ist durch

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

b) Zeigen Sie, daß für den Fehler $e_k := x_k - \frac{1}{a}$ gilt:

$$e_{k+1} = -ae_k^2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie außerdem mit vollständiger Induktion, daß gilt:

$$e_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \qquad \rho := |ax_0 - 1|\,.$$

Welche Bedingung an ρ und x_0 ist notwendig und hinreichend für die globale Konvergenz des Iterationsverfahrens?

c) Es sei $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $x_0 = \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der erforderlichen elementaren Rechenoperationen zur Berechnung einer Näherung x_k für $\frac{1}{a}$ durch das Newton-Verfahren mit einem Fehler kleiner als 10^{-8}.

Programmieraufgabe 5: (Newton-Verfahren).

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `NewtonV(x0,tol,maxiter)`, welche für eine fest vorgegebene Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ausgehend vom Startwert `x0` $\in \mathbb{R}^n$ solange Newton-Iterationen durchführt, bis das Abbruchkriterium $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq$ `tol` erreicht wurde oder eine maximale Anzahl an

Iterationen `maxiter` überschritten wurde. Die Funktion soll in $z \in \mathbb{R}^n$ die letzte Newton-Iterierte, in `iter` $\in \mathbb{N}$ die Anzahl der durchgeführten Iterationen sowie eine Variable $b \in \{0, 1\}$ (die 0 ist, falls die maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde, sonst 1) zurückgeben.

Verwenden Sie als Approximation der Jacobimatrix die zentrierten Differenzen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x + e_j h) - f_i(x - e_j h)}{2h}$$

mit $h = 10^{-6}$. Die Funktion f soll dabei in einer separaten MATLAB-Funktion `f(x)` für Eingabewerte $x \in \mathbb{R}^n$ und Rückgabewerte $y = (f_1(x), ..., f_n(x))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ umgesetzt werden und so aufgestellt sein, dass mit obiger Funktion eine Lösung des folgenden Gleichungssystems (mit $n = 2$) ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{5}x_2 &= \frac{4}{25}, \\ x_1^2 - x_2^2 + x_1 - \frac{8}{5}x_2 &= \frac{7}{50}. \end{aligned}$$

Die MATLAB-Funktionen sollen dabei folgende Gestalt haben:

```
function[z,iter,b] = NewtonV(x0,tol,maxiter)
...
end
```

```
function[y] = f(x)
...
end
```

b) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `mainNV.m`, welches ausgehend von den Startwerten $(1, 1)^{\mathrm{T}}$ und $(-1, -1)^{\mathrm{T}}$ unter Verwendung der MATLAB-Funktion `NewtonV` jeweils ausgibt, ob das Newton-Verfahren konvergiert ist, wie die Approximation an die Lösung lautet und wie viele Iterationen dazu benötigt wurden. Hierbei sei `maxiter` $= 100$ und `tol` $= 10^{-5}$.

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 16.01.2024 statt. Abgabe von Programmieraufgabe 5 bis spätestens 23.01.2024. Die genauen Details der Abgabe finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an " *progtutor@na.uni-tuebingen.de* " .