EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Dr. Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2023/24 **Tübingen, 18.12.2023**

Übungsblatt 10

Problem 1. Sei $(\mathbb{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}})$ ein Prähilbertraum, und $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Wir wissen bereits, daß für jedes $f \in \mathbb{H}$ genau ein $g \equiv g(f) \in \mathbb{S}$ mit Bestapproximations-Eigenschaft existiert. Zeigen Sie, daß gilt:

$$(f - g, \varphi)_{\mathbb{H}} = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{S}\,.$$

Problem 2: Zeigen Sie, daß die Summe der Gewichte von interpolatorischen Quadraturformeln immer die Intervall-Länge ist.

Problem 3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_n(f)$ eine Quadraturformel der Ordnung $n + 1$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i und Gewichten $\alpha_i > 0$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, daß für Funktionen $f \in C([a, b])$ gilt:

$$\Big| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_n(f) \Big| \leq 2(b-a) \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C([a,b])}\,,$$

wobei $\mathcal{P}_n$ den Raum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ bezeichnet.

Problem 4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Um ein Gauß-Quadraturverfahren der Ordnung $2n + 2$ mit Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ (und Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$) zu konstruieren, wurde in der Vorlesung ein eindeutiges Polynom $p_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$ der Form

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren konstruiert. Dieses Polynom p_{n+1} hat die Eigenschaft, daß $(p_{n+1}, q)_\omega = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie: Die Nullstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ des Polynoms p_{n+1} sind reell, einfach, und liegen im Intervall (a, b).

Programmieraufgabe 4: (Richardson Extrapolation) Implementieren Sie eine Modifikation der Richardson'schen Extrapolation aus der Vorlesung.

a) Seien $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei a den zentralen Differenzenquotienten bezüglich der gegebenen Funktion f berechne. Schreiben Sie eine Funktion

```
function[z] = richard(f,x0,h0,q,nmax,tol)
...
end
```

die für Punkte $\left(x_0 + h_k^q, a(x_0 + h_k^q)\right)$ mit $h_k^q := 2^{-kq} h_0$ mit $h_0 \in \mathbb{R}$ und $k, q \geq 1$ die Ableitung $z := a(x_0 + h_k^q) = p_n(x_0 + h_k^q)$ approximiert, wobei p_n^k das Interpolationspolynom bezeichnet.

Die Auswertung von p_n^k soll mittels des Neville-Algorithmus erfolgen. Das Verfahren soll abbrechen, wenn der Fehler $|a_{k,k} - a_{k+1,k+1}| <$ `tol` oder die maximale Anzahl an Iterationen `nmax` erreicht ist. Geben Sie das Extrapolationstableau in der Konsole aus.

b) Approximieren Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \sin(x)$ im Punkt $x_0 = 1$ auf mindestens 8 Nachkommastellen genau für $h_0 = 1$ und $q = 2$. Die Funktion f soll hierbei als anonyme Funktion implementiert werden. Schreiben Sie dazu ein Matlab-Skript `main_richard.m`, welches diese Berechnungen ausführt.

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 09.01.2024 statt. Abgabe von Programmieraufgabe 4 bis spätestens 15.01.2024. Die genauen Details der Abgabe finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an " progtutor@na.uni-tuebingen.de ".