



Numerik

Wintersemester 2023/24

Tübingen, 16.10.2023

Übungsblatt 1

Problem 1. Gegeben seien Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, durch

$$\varphi_1(x, y) := x + y, \quad \varphi_2(x, y) := x \cdot y, \quad \varphi_3(x, y) := \frac{x}{y}.$$

Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\text{err}_{\text{rel}}(\varphi_i) = \left| \frac{\varphi_i(\tilde{x}, \tilde{y}) - \varphi_i(x, y)}{\varphi_i(x, y)} \right|, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

für die Näherungswerte

$$\tilde{x} := x(1 + \varepsilon_x), \quad \tilde{y} := y(1 + \varepsilon_y).$$

Für welche Konstellationen von x und y werden die Eingabefehler ε_x und ε_y jeweils verstärkt? Welche der Grundrechenarten Addition, Multiplikation und Division sind damit gut gestellt und daher beim Rechnen mit dem Computer stabil gegenüber Rundungsfehlern?

Problem 2. In der Vorlesung wurden die Landau'schen Symbole eingeführt. Gegeben seien die Funktionen

$$x^3, \quad \log x, \quad 2^x, \quad x^2, \quad x^3 + 1000x^2, \quad e^x.$$

Vergleichen Sie das Wachstum dieser Funktionen für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow 0$ mithilfe der \mathcal{O} -Notation.

Problem 3. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und betrachte eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n . Betrachte nun den Raum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Zeigen Sie, daß durch

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine Norm auf dem Raum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen definiert ist.

ACHTUNG: Beginn der Übungsgruppen am Dienstag, den 24.10.2023!.