Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.01.2023

13. Übungsblatt zur Numerik

Hinweis: Für die Klausurzulassung müssen insgesamt 50% der 51 Aufgaben als gelöst angekreuzt worden sein, also 25,5 Aufgaben der 13 Übungsblätter.
Bitte beachten Sie die Informationen zur Klausur auf der Homepage.

Aufgabe 48: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

Aufgabe 49: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t, y)$, wobei $\mu(A) \le \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 46). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

(a) Falls $\ell + L \le 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y(t_0) - z(t_0)\| \qquad \text{für } t \ge t_0.$$

(b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \le \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Aufgabe 50: Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \dots, s \tag{1}$$

angewandt auf die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist äquivalent zu einem Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das autonome System $z' = F(z)$ mit

$$z = \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix}.$$

Diskutieren Sie zudem die Voraussetzung (1), indem Sie die innere Stufe Y_i als Näherung von $y(t_0 + c_i h)$ interpretieren.

Aufgabe 51: In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren Ordnung 2 hat.

Programmieraufgabe 7: Es sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(t)}{\partial t} &= -\beta\frac{I(t)S(t)}{N}\\ \frac{\partial I(t)}{\partial t} &= \beta\frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t)\\ \frac{\partial R(t)}{\partial t} &= \gamma I(t).\end{aligned}$$

Dieses System von DGL's ist ein sogenanntes SIR-Modell - ein klassischer Ansatz zur Modellierung der Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten. Hier ist die Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt: Die Ansteckbaren $S(t)$ (=Susceptibles), die Infizierten $I(t)$ (=Infected) und die Genesenen bzw. Gestorbenen $R(t)$ (=Recovered). N steht für die Gesamtzahl an Menschen. β gibt die Anzahl an neuen Infektionen an, die eine neu infizierte Person pro Zeiteinheit verursacht. γ gibt die Rate an, in welcher eine infizierte Person in einer Zeiteinheit genesen oder sterben wird. Der bekannte R-Wert (Basisreproduktionszahl) lässt sich damit einfach durch $R = \beta/\gamma$ berechnen.
Um den weiteren Verlauf der Krankheit zu modellieren, muss man das obige System von Differentialgleichungen lösen. Lösen Sie dazu die obigen Differentialgleichungen mit dem expliziten Eulerverfahren zu den Werten $t_0 = 0$, $t_{end} = 26$,$\beta = 0.505$, $\gamma = 0.5$ und $y_0 = (83 \cdot 10^6, 3,5 \cdot 10^5, 25 \cdot 10^6)^T$ und Schrittweite $h = 0.13$. Diese Zahlen entsprechen sehr grob den Zahlen zur Coronapandemie in Deutschland im Sommer 2022. Plotten Sie nun die Lösungen $S(t), I(t)$ und $R(t)$.

Hinweis: Wenn Sie die Parameter β und γ verändern, können Sie andere Modelle zum weiteren Pandemieverlauf aufstellen. Setzen Sie z.B. $\beta = 1$, so infiziert eine bereits infizierte Person pro Woche eine weitere Person. Bleibt die Person für zwei Wochen ansteckend (also $\gamma = 0.5$), so simulieren Sie einen R-Wert von 2.

Freiwillig: Sie können ihre berechnete Lösung mit den tatsächlichen Zahlen der Coronapandemie vergleichen und so auf die Genauigkeit des Modells schliessen.

Besprechung der Übungsaufgaben am 01.02.2023.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 08.02.2023, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA7_Nachname1_Nachname2_Nachname3.