Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.01.2023

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 45:

Betrachten Sie die folgende (misslungene) Matlab-Funktion,

```
function [z] = unknown_fun(z0,g,t)

k = 1000;
i = 1;
z = z0;
h = 10^-3;
d = f(z);

while (i<k) || (abs(d)>t)
    a = f(z);
    b = (1/h)*(f(z+h) - f(z-h));
    d = (1/b)*a;
    z = z + d;
    i = i + 1;
end
end
```

sowie das zugehrige (misslungene) Skript

```
xs = [-1,0,1];
sols = zeros(1,3);
e = zeros(1,3);
g=@(x)(x.^3+2);

for j=0:length(xs)
    sols(j) = unknown_fun(xs(j),g,0.01);
    e(j) = abs(g(sols(j)));
end
disp(e)
```

(a) Welcher aus der Vorlesung bekannte Algorithmus wird hier implementiert? Erklären Sie die Bedeutung der Eingabe- und Ausgabewerte der Funktion. Was wurde in der Variable e im obigen Skript berechnet?

(b) Welche Fehler wurden bei der Umsetzung begangen? Unterscheiden Sie zwischen Logik- und Syntaxfehlern. Korrigieren Sie die Fehler im Code, so dass das Skript und die Funktion lauffähig sind und korrekte Ergebnisse liefern. In Funktion und Skript befinden sich insgesamt 5 Fehler.

(c) Verändern Sie die Funktion nun so, dass Sie die vereinfachte Version des Algorithmus erhalten.

Aufgabe 46: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f(y) - f(z), y - z \rangle &\leq \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad && \text{mit } \ell = \sup_{u \in D} \mu\big(f'(u)\big) \\ \|f(y) - f(z)\| &\leq L \cdot \|y - z\| && \text{mit } L = \sup_{u \in D} \|f'(u)\|, \end{aligned}$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen A

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T), \\ \|A\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}. \end{aligned}$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v \rangle$.

Aufgabe 47: Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M \frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T-t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.
Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Besprechung der Übungsaufgaben am 25.01.2023.