Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.01.2023

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 41: Zeigen Sie, dass es in $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$ eine Lösung (x^*, y^*) des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 - 3x &= -3 \\ \frac{3}{4}\sin(x) &= y \end{aligned}$$

gibt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 42: Zeigen Sie für das gewöhnliche Newton-Verfahren unter den Voraussetzungen des Newton-Mysovskii-Theorems die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\| &\le \alpha \frac{\gamma^{2^k-1}}{1-\gamma^{2^k}}, \\ \|x_k - x^*\| &\le \frac{\omega}{2(1-\gamma^{2^k})}\|x_k - x_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 43: Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \le n$. Zeigen sie:

(a) Falls $v^TMv > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und G vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

Aufgabe 44: Geben Sie einen Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &= \min! \\ g(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

der auf ein Gleichungssystem wie in Aufgabe 43 führt. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \ge n)$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$ Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe in einer Umgebung der Lösung vollen Rang.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine Lösung x^* des obigen Minimierungsproblems mit Nebenbedinung existiert. Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren um x^*. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator λ ein.

Programmieraufgabe 6: (Newton-Verfahren)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `newton`, die für eine feste Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und für gegebenen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Newton-Iterationen bis zu $\|\Delta x_k\| \leq$ `TOL` durchführt. Diese Funktion soll die Jakobimatrix $f'(x)$ numerisch berechnen (mit zentralen Differenzen) und folgende Struktur besitzen:

```
function x = newton(f,x0,TOL)
      ⋮
end
```

Benutzen Sie zum Lösen des linearen Gleichungssystems die LR-Zerlegung. Diese können Sie entweder selbst implementieren oder Sie verwenden die Matlab-Funktion für die LR-Zerlegung `lu`.

Testen Sie die Funktion am System

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 11 \\ x_1x_2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

mit Startwert $(4, -2, 0)^T$ und `TOL`$= 10^{-6}$ in einem Programm `mainNewton`. Bemerkung: Damit berechnen Sie zugleich alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (Vieta).

Besprechung der Übungsaufgaben am 18.01.2023.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 25.01.2023, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA6_Nachname1_Nachname2_Nachname3.