

## 10. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 37:** Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , ist die Konditionszahl definiert durch  $\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$ .

Sei  $A = QR$  die QR-Zerlegung von  $A$  mit  $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition  $\text{cond}_2$  gilt:

(a)  $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1, \dots, n} |r_{ii}|}{\min_{k=1, \dots, n} |r_{kk}|}$ .

(b)  $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$ .

**Aufgabe 38:** (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz  $y = x_1 z + x_2$  mit zwei unbekanntem Parametern  $x_1, x_2$  vor, zu dem ein Satz von Messdaten  $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$  mit  $z_l = l$  gegeben sei.

- (a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem  $Ax = y$  auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung  $A^T A = LL^T$ .
- (c) Schätzen Sie die Konditionszahl  $\text{cond}_2(L)$  mit Hilfe von Aufgabe 32 ab.

**Aufgabe 39:** Sei  $p$  ein Polynom vom Grad  $n$ , dessen Nullstellen  $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$  reell seien.

- (a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen  $\xi_1$  konvergiert, falls der Startwert  $x_0 > \xi_1$  ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $p''(x)$  für  $x > \xi_1$  das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.
- (b) Falls  $x_0$  viel größer als  $\xi_1$  ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ( $x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$ ).

**Aufgabe 40:**

- (a) Berechnen Sie iterativ  $x = 1/a$  für ein gegebenes  $a \neq 0$  ohne Division. Für welche Startwerte  $x_0$  konvergiert das Verfahren?
- (b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von  $x = \sqrt{a}$  für  $a > 0$  an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.



**Besprechung der Übungsaufgaben am 11.01.2023.  
Das Numerik-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!**