

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch $\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$.

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition cond_2 gilt:

(a) $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1, \dots, n} |r_{ii}|}{\min_{k=1, \dots, n} |r_{kk}|}$.

(b) $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$.

Aufgabe 38: (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

- (a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.
- (c) Schätzen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(L)$ mit Hilfe von Aufgabe 32 ab.

Aufgabe 39: Sei p ein Polynom vom Grad n , dessen Nullstellen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$ reell seien.

- (a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen ξ_1 konvergiert, falls der Startwert $x_0 > \xi_1$ ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ für $x > \xi_1$ das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.
- (b) Falls x_0 viel größer als ξ_1 ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ($x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$).

Aufgabe 40:

- (a) Berechnen Sie iterativ $x = 1/a$ für ein gegebenes $a \neq 0$ ohne Division. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren?
- (b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$ für $a > 0$ an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.



**Besprechung der Übungsaufgaben am 11.01.2023.
Das Numerik-Team wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!**