Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 14.12.2022

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 33: Seien y, z zwei Vektoren von Gleitpunktzahlen. Das Standardskalarprodukt lässt sich rekursiv durch $\langle y, z\rangle = z_n y_n + \langle y^{n-1}, z^{n-1}\rangle$ berechnen, wobei $y^{n-1} := (y_1, \cdots, y_{n-1})^T$, z^{n-1} analog. Zeigen Sie: Das in Gleitpunktrechnung erhaltene Ergebnis $\langle y, z\rangle_{fl}$ des Skalarproduktes ist gleich $\langle \hat{y}, z\rangle$ für ein $\hat{y}$ mit

$$|y - \hat{y}| \leq n|y|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2).$$

Aufgabe 34: Seien L, R untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen, b, c Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse $\hat{x}$, $\hat{y}$ für die Gleichungssysteme $Ly = b$, $Rx = c$ sind die exakten Lösungen von $\hat{L}\hat{y} = b$ mit $|L - \hat{L}| \leq n|L|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$ bzw. $\hat{R}\hat{x} = c$ mit $|R - \hat{R}| \leq n|R|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$.
Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 33.

Aufgabe 35:

Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix, $n > 1$. Zeigen Sie, dass Q als Produkt von höchstens n Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^n$ ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Spiegelungen).

Aufgabe 36:

Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Programmieraufgabe 5:

(a) Schreiben Sie eine Funktion `L = cholesky(A)`, die die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ einer symmetrisch positiv definiten Matrix A berechnet.

(b) Schreiben Sie Funktionen `y = vorSub(L,b)` und `x = rueckSub(L,y)`, die die Gleichungssysteme $Ly = b$ und $L^T x = c$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen lösen.

(c) Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & -8 & 5 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 45 \\ 81 \end{pmatrix}$$

mit obigen Funktionen lösen.

Besprechung der Übungsaufgaben am 21.12.2022. Beachten Sie dass diese via Zoom stattfinden!
Abgabe der Programmieraufgabe bis 11.01.2023, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA5_Nachname1_Nachname2_Nachname3.