

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 29: Gegeben sei eine $(n \times n)$ -Matrix A mit $\|A\| \leq r < 1$.
Zeigen Sie: $I - A$ ist invertierbar und es gelten

- (a) $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumannsche Reihe),
- (b) $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-r}$.

Aufgabe 30: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

- (a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
- (b) $\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)
- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}$

Aufgabe 31: Zeigen Sie:

$$\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Mithilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Aufgabe 32:

Es sei die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

- (a) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq l_{ii}^2$.
- (b) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}$.
- (c) Für die Konditionszahl $\text{cond}_2(L) = \|L\|_2 \|L^{-1}\|_2$ gilt $\text{cond}_2(L) \geq \max_{1 \leq i, k \leq n} \left| \frac{l_{ii}}{l_{kk}} \right|$.