

## 7. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 25:** Jedes Element  $T_{ik}$  im  $h^2$ -Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Hierbei ergeben sich die  $T_{i1}$  aus der  $i$ -fachen Anwendung der Trapezregel auf das Integral  $\int_{x_0}^{x_0+H} f(x) dx$ , mit Schrittweite  $h_i = \frac{H}{i}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $T_{2,2}$  bei Verwendung der Folge  $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$  der Simpsonregel entspricht.
- (b) Welcher Quadraturformel entspricht  $T_{3,3}$ ?

**Aufgabe 26:** Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 6 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ , wobei

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 27:**

- (a) Sei  $A = LR$  die LR-Zerlegung der  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  mit  $|l_{ij}| \leq 1$ . Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung  $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$  für die Zeilen  $a_i^T$  und  $r_i^T$  von  $A$  und  $R$  und Induktion.

- (b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

**Aufgabe 28:** Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls  $a_{ij} = 0$  für  $|i - j| > p$ , so ist  $l_{ij} = 0$  für  $i - j > p$  und  $r_{ij} = 0$  für  $j - i > p$ .

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?

**Programmieraufgabe 4:** Programmieren Sie das  $h^2$ -Extrapolationstableau für die extrapolierte Trapezregel zur Berechnung von  $\int_0^\pi \sin(x)dx$ . Verwenden Sie die Folge  $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16\}$ . Geben Sie die Fehler  $T_{j,1} - 2$ ,  $T_{j,j} - 2$  sowie die Fehlerschätzung  $T_{j,j} - T_{j,j-1}$  aus.

Besprechung der Übungsaufgaben am 07.12.2022

Abgabe der Programmieraufgabe bis 14.12.2022, 23:59 Uhr an [progtutor@na.uni-tuebingen.de](mailto:progtutor@na.uni-tuebingen.de)  
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA4\_Nachname1\_Nachname2\_Nachname3.