

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 25: Jedes Element T_{ik} im h^2 -Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Hierbei ergeben sich die T_{i1} aus der i -fachen Anwendung der Trapezregel auf das Integral $\int_{x_0}^{x_0+H} f(x) dx$, mit Schrittweite $h_i = \frac{H}{i}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $T_{2,2}$ bei Verwendung der Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$ der Simpsonregel entspricht.
- (b) Welcher Quadraturformel entspricht $T_{3,3}$?

Aufgabe 26: Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 6 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27:

- (a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n \times n)$ -Matrix A mit $|l_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen a_i^T und r_i^T von A und R und Induktion.

- (b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

Aufgabe 28: Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > p$, so ist $l_{ij} = 0$ für $i - j > p$ und $r_{ij} = 0$ für $j - i > p$.

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?

Programmieraufgabe 4: Programmieren Sie das h^2 -Extrapolationstableau für die extrapolierte Trapezregel zur Berechnung von $\int_0^\pi \sin(x)dx$. Verwenden Sie die Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16\}$. Geben Sie die Fehler $T_{j,1} - 2$, $T_{j,j} - 2$ sowie die Fehlerschätzung $T_{j,j} - T_{j,j-1}$ aus.

Besprechung der Übungsaufgaben am 07.12.2022

Abgabe der Programmieraufgabe bis 14.12.2022, 23:59 Uhr an progtutor@na.uni-tuebingen.de
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA4_Nachname1_Nachname2_Nachname3.