

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 13:

Es sei eine Funktion f gegeben. Ergänzen Sie die untenstehende Matlab-Funktion, sodass diese in einem Vektor dy die Koeffizienten des Newtoninterpolationspolynoms zurückgibt (also die dividier-ten Differenzen $\delta^k y[x_0, \dots, x_k]$). Benutzen Sie dafür nicht Matlab selbst, sondern schreiben Sie dies von Hand. Sie dürfen dabei annehmen, dass der Input x ein Vektor mit paarweise verschiedenen Stützstellen, sowie y ein Vektor der Funktionswerte ist, also $f(x_i) = y_i$ gilt.

```
1 function [dy] = newton_koeff(x,y)
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14 end
```

Hinweis: Schreiben Sie Matlab-Code, Pseudocode ist nicht erlaubt.

Aufgabe 14: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1T_1(x) + \dots + c_nT_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x d_{k+1} - d_{k+2} & (k = n, n-1, \dots, 0), & & d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x e_{k+1} - e_{k+2} & (k = n, n-1, \dots, 1), & & e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Aufgabe 15: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = 1 + T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x) + T_5(x) + T_6(x) + T_7(x) + T_8(x) + T_9(x).$$

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner)

$$\sum_{k=0}^9 p(x_k)^2 \quad \text{mit } x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{10} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

sowie

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x p(x) dx \quad .$$

Hinweis: Orthogonalität der T_k

Aufgabe 16:

(a) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Daten

$$\begin{array}{c|cc} x_j & -1 & 1 \\ \hline y_j & 1 & 7 \\ y'_j & -1 & 3 \end{array}$$

sowie $p(0)$.

(b) Sei $f \in C^4[x_0, x_1]$, $h = x_1 - x_0$ und p sei das kubische Hermite-Interpolationspolynom mit $p(x_i) = f(x_i)$ und $p'(x_i) = f'(x_i)$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f^{(4)}(\xi)|, \quad x \in [x_0, x_1].$$