Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.11.2022

3. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 9: Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y_i & 8 & 3 & 4 & 8 \end{array}.$$

(a) Man interpoliere die Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.

(b) Es seien $(x_4, y_4) = (2, 1)$. Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes (x_4, y_4)?

(c) Man bestimme mit der Iterpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.

(d) Vergleichen Sie den Aufwand der Auswertung des Interpolationspolynoms an einer Stelle $\bar{x}$ in der Newtonschen und der Lagrangeschen Darstellung.

Aufgabe 10: Gegeben sei das Interpolationspolynom $p(x)$ von $f(x)$ zu den Stützstellen $x_0, x_0 + \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon, \ldots, x_0 + n\varepsilon$, wobei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar sei.

(a) Zeigen Sie, dass $p(x)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0 konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Form des Interpolationsfehlers $f(x) - p(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass für ein Polynom p vom Grad n eine brauchbare und leicht zu berechnende Schätzung von $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)|$ durch $\max_{k=0,\ldots,n} |p(x_k)|$ gegeben ist, falls x_k die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} sind: Finden Sie eine möglichst kleine Konstante C_n, so dass

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \le C_n \cdot \max_{k=0,\ldots,n} |p(x_k)|$$

Aufgabe 12:

Zeigen Sie die folgende Fehlerabschätzung für die Trapezregel:

$$\Big| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}_{=I(f)} - \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) \Big| \le \frac{h^3}{12} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|,$$

indem Sie $\frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) = I(\hat{f}))$ als Integral über eine f interpolierende Funktion $\hat{f}$ interpretieren und die Restglieddarstellung der Polynominterpolation verwenden.

Programmieraufgabe 2: (Adaptive numerische Integration)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `y = adaptint(f,a,b,tol)`, die für Intervallgrenzen a und b und eine vorgegebene Toleranz `tol` das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

mit Hilfe der Simpsonregel berechnet, wobei der absolute Fehler kleiner als `tol` sein soll. Durch den rekursiven Aufruf von `adaptint` soll das Grundintervall adaptiv zerlegt werden. Zur Schätzung des Fehlers verwenden Sie die Mittelpunktsregel. Die Matlab-Funktion soll folgende Form besitzen:

```
function [y] = adaptint(f,a,b,tol)
      ⋮
end
```

Schreiben Sie ein Skript `adaptint_test`, indem Sie eine Approximation von

$$\int_0^4 x^2 \mathrm{e}^{-5x} \mathrm{d}x$$

berechnen.

Hinweise:

- Die Funktion `adaptint(f,a,b,tol)` berechnet Nherungen von $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mithilfe der Simpson- und der Mittelpunktsregel. Falls $|Simpson - Mittelpunkt| > tol$ wird das Intervall $[a, b]$ halbiert und als Ergebnis `adaptint(f,`$a, (a+b)/2$`,tol/2)` + `adaptint(f,`$(a+b)/2, b$`,tol/2)` zurückgegeben, ansonsten wird als Ergebnis *Simpson* akzeptiert. Die Funktion ruft sich im ersten Fall also selbst auf (rekursiv).
- Verwenden Sie zum Aufruf von `adaptint` ein *function handle*, d. h. deklarieren Sie `f = @(x)(x^2*exp(-5*x))`.

Besprechung der Übungsaufgaben am 09.11.2022
Abgabe der Programmieraufgabe bis 16.11.2022, 23:59 Uhr an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA2_Nachname1_Nachname2_Nachname3.